

Mat-1.2990 Modernin analyysin perusteet

2. välikoe 4.5.2013 klo 10-13

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia. Koeaika on 3h.

1. Olkoon $C \subset [0, 1]$ tavalliseen tapaan (“keskikolmannekset pois”) muodostettu Cantorin joukko ja olkoon λ Lebesguen mitta.

(a) Todista, että $\lambda(C) = 0$.

(b) Määritellään joukot $C_q \subset \mathbb{R}$ kullakin rationaaliluvulla $q \in \mathbb{Q}$ kaavalla

$$C_q := C + q = \{x + q \in \mathbb{R} : x \in C\}.$$

Määrää joukon

$$E := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} C_q$$

mitta $\lambda(E)$. Perustele!

2. Olkoon (X, \mathcal{M}, μ) mitta-avaruus.

(a) Määrittele milloin funktio $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on mitallinen (merkitään $f \in M$).

(b) Olkoon $f \in M$. Määritellään $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että $g(x) = -|f(x)|^2$.

Näytä, että $g \in M$.

3. Kurssilla esiteltiin tärkeitä suppenemislauseita, joista erään avulla voidaan laskea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \cos(x^N/n) e^{-x^2} dx,$$

missä $N > 0$ on kokonaisluku.

(a) Muotoile kyseinen kurssilla esitelty lause.

(b) Laske mainittu lasku a-kohdassa antamasi lauseen avulla.