Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, perustieteiden korkeakoulu

Nevanlinna/Lehtelä

Mat-1.2990 Modernin analyysin perusteet

1. välikoe 2.3.2013 klo 10-13

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia. Koeaika on 3h.

1. Olkoon X ja Y joukkoja. Määritellään relaatio "$<$" siten, että $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$, jos ja vain jos Y on aidosti mahtavampi kuin X.
   (a) Määrittele tarkasti mitä tarkoittaa Y on aidosti mahtavampi kuin X.
   (b) Näytä, että kaikilla joukoilla X pätee
   $$\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(X)).$$
2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $K \subset X$ kompakti.
   (a) Määrittele tarkasti kompakti joukko.
   (b) Todista suoraan määritelmän perusteella: jos $S \subset K$ on suljettu, niin S on kompakti.
3. Kuvaus $\Lambda : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ on distribuutio, merkitään $\Lambda \in \mathcal{D}'$, jos se on lineaarinen ja jatkuva.
   (a) Määrittele tarkasti distribuutioiden jatkuvuus.
   (b) Tarkastellaan porrasfunktiota $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$P(x) := \sum_{j=0}^{\infty} H_j(x),$$
   missä
   $$H_a(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$
   Tämä sarja suppenee jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Suppeneeko osasummien jono avaruudessa $\mathcal{D}'$, eli onko Λ_P distribuutio? Mikä on Λ_P:n distribuutioderivaatta?

Department of Mathematics and Systems Analysis
Aalto University, School of Science

Nevanlinna/Lehtelä

Mat-1.2990 Foundations of Modern Analysis

1^{st} mid-term exam on March 2nd 2013 at 10-13

Please fill in clearly *on every sheet* the data on you and the examination. On *Examination code* mark course code, title and text mid-term or final examination. Degree Programmes are ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

No calculators allowed. The exam will last 3 hours.

1. Let X and Y be sets. We define the relation "$<$" so that $\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(Y)$, if and only if Y has cardinality strictly greater than the cardinality of X.
   (a) Define in detail what does the statement "Y has cardinality strictly greater than the cardinality of X" mean.
   (b) Show that for any set X the following holds:
   $$\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(\mathcal{P}(X)).$$
2. Let (X, d) be a metric space and let $K \subset X$ be compact.
   (a) What is the definition of compactness of a set K?
   (b) Prove using the definition of compactness, that if $S \subset K$ is closed, then S is compact.
3. A functional $\Lambda : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ is a distribution, denoted $\Lambda \in \mathcal{D}'$, if it is linear and continuous.
   (a) Give the definition of continuity for distributions.
   (b) Let $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$P(x) := \sum_{j=0}^{\infty} H_j(x),$$
   be the step function where
   $$H_a(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$
   This series converges for all $x \in \mathbb{R}$. Does the sequence of partial sums converge in $\mathcal{D}'$ i.e. is Λ_P a distribution? What is the distributional derivative of Λ_P?