Aalto-yliopisto
Teknillisen fysiikan laitos

**Tfy-0.2062 Fysiikka 6** **Tentti, 21.12.2012**

Hakola, Kurki-Suonio

Kurssin voi suorittaa vaihtoehdon A tai B mukaisesti.
**Vaihtoehto A**: vastaa valintasi mukaan **neljään** tehtävään. Kurssiarvosana määräytyy sekä tämän tentin että laskuharjoituspisteittesi perusteella.
**Vaihtoehto B**: vastaa **kaikkiin** tehtäviin. Kurssiarvosana määräytyy tämän tentin perusteella.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi paperiin, kumman vaihtoehdon olet valinnut! Mikäli tämä ei käy selvästi ilmi tai vaihtoehdosta A huolimatta vastaat viiteen tehtävään, koe arvostellaan vaihtoehdon B mukaisesti. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä mitään apumateriaalia. Voit vastata kysymyksiin suomeksi, ruotsiksi tai englanniksi. Huomaa myös kokeen lopussa oleva aputietolista.

1. Tarkastellaan tässä tehtävässä kvanttimekaanista hiukkasta, jota kuvataan aaltofunktiolla

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a}}, & x < |a| \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä $a > 0$.

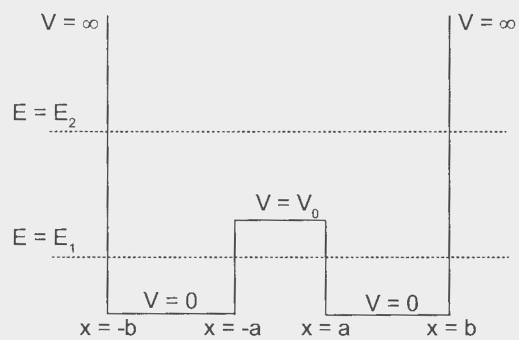
a) Mitä tarkoitetaan, kun $u(x)$:n sanotaan olevan *aaltopaketin* muotoinen? Mitä tarkoitetaan aaltopaketin *paikkataajuusspektrillä*? Määritä paikkataajuusspektri $\phi(k)$ funktiolle $u(x)$. (3p)

b) Piirrä sekä $u(x)$:n että $\phi(k)$:n kuvaajat tapauksessa $a = 1$ ja $a = 10$. Mitä huomaat? Määritä $\Delta x$:n arvo funktion $u(x)$ avulla ja arvioi $\Delta k$:n arvoa funktion $\phi(k)$ kuvaajan avulla. Mitä huomaat, kun tarkastelet tuloa $\Delta x \Delta k$ tapauksissa $a = 1$ ja $a = 10$? (3,5p)

c) Miten aika $t$ saadaan otettua huomioon aaltopaketissa? Kirjoita tämän perusteella lauseke tarkastelemamme hiukkasen ajasta riippuvalle aaltofunktiolle $\psi(x,t)$. (1,5p)

2. Tarkastellaan kuvan 1 mukaista äärettömän syvää potentiaalikuoppaa, jonka keskelle on kuitenkin ilmestynyt $V_0$:n korkuinen valli.

Ratkaise kuoppaan joutuneen hiukkasen (massa $m$, kokonaisenergia $E$) liikettä kuvaava *ajasta riippumaton Schrödingerin yhtälö* jokaisessa fysikaalisesti erilaisessa alueessa. Tee tämä sekä tapauksessa $E > V_0$ että tapauksessa $0 < E < V_0$. Kirjoita yhtälöt, joista saisit selvitettyä ratkaisussa esiintyvät määräämättömät kertoimet; kertoimien arvoja ei kuitenkaan tarvitse määrittää. Piirrä kummassakin tapauksessa jonkin ominaistilan aaltofunktio eri alueissa ja selitä sanallisesti aaltofunktion tärkeimmät ominaisuudet. Kiinnitä huomiota aaltofunktion jatkuvuuteen, aallonpituuteen sekä amplitudiin. (8p)




Kuva 1: Äärettömän syvä potentiaalikuoppa (leveys $2b$), jonka keskellä on nökö (korkeus $V_0$, leveys $2a$).

KÄÄNNÄ

3. Tässä tehtävässä paneudumme vetyatomin aaltofunktioihin $\psi_{100}$, $\psi_{200}$, $\psi_{210}$, $\psi_{21,-1}$, $\psi_{300}$ sekä $\psi_{311}$.

   a) Kerro, mitä kaikkea tietoa vetyatomista yllämainitut aaltofunktiot pitävät sisällään. (1p)

   b) Minkä kaikkien yllämainittuja aaltofunktioita vastaavien tilojen välillä voi tapahtua *sähköisiä dipolitransitioita*? Perustele vastauksesi. (1p)

   c) Mihin b)-kohdassa määrittämistäsi transitioista liittyy vetyatomin spektrissä näkyvä $H_\alpha$-viiva aallonpituudella 656,3 nm? Kun katsot spektriviivaa tarkkaan, niin kuinka moneen osaan se on oikeasti hajonnut? Perustele vastauksesi huolellisesti. Kuinka hyvä käyttämäsi spektrometrin resoluution pitää olla, jotta viivat erottuisivat toisistaan? (3p)

   d) Mitä c)-kohdassa selvittämillesi spektriviivoille tapahtuu, kun ulkoinen magneettikenttä laitetaan päälle? Miten lopputulokset eroavat toisistaan, jos kentän voimakkuus on fuusioreaktorissa tyypillinen 2 T tai laboratorioissa tavanomainen 100 mT? Perustele jälleen vastauksesi huolellisesti. (3p)

4. Olet saanut tutkittavaksesi yhden mummon perintöhopealusikoista. Haluat selvittää näytteen ominaisuudet tarkasti, ja sitä varten sinun on tiedettävä keskimääräinen energia $E_{\text{ave}}$ hopean valenssielektronien muodostamassa elektronikaasussa. Laske tämä keskimääräinen energia huoneenlämpötilassa ($T \approx 300$ K) (i) Maxwell–Boltzmann- ja (ii) Fermi–Dirac-statistiikkaa apunasi käyttäen ja vertaa saamiasi lukuarvoja toisiinsa. Kumpi lähestymistapa antaa mielestäsi järkevämpiä tuloksia ja miksi?

   (i)-kohdassa sinua auttaa tieto, että differentiaalinen hiukkaslukumäärä differentiaalisella energiavälillä on $dN = \frac{N}{Z} D(E) g(E) e^{-E/(k_B T)}\, dE$, missä $N$ on hiukkasten kokonaislukumäärä, $D(E)$ on degeneraatio, $g(E) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2} E^{1/2}$ on tilatiheys ja $Z$ on partitiofunktio eli tilasumma (jonka lausekkeen joudut nyt laskemaan). (ii)-kohdassa voit puolestaan approksimoida Fermi–Dirac-jakaumaa nollalämpötilan (siis $T = 0$ K) tuloksella. Hopealla on yksi valenssielektroni, tiheys on $\rho_m \approx 11 \cdot 10^3$ kg/m$^3$ ja moolimassa $M \approx 108$ g/mol. Lisää aputietoja löytyy koepaperin lopusta. Lausekkeet ja suuruusluokka-arviot riittävät vastaukseksi. (8p)

5. What a pleasant surprise: kirjoita 1–2 sivun pituinen essee aiheesta "Puolijohdelaserit: toimintaperiaate ja sovelluskohteet"! Kerro vastauksessasi ainakin (i) mistä lasertoiminnassa on kyse, (ii) millä ehdoilla ja minkälaisissa aineissa lasertoiminta on mahdollista, (iii) miten käsitteet miehitysinversio, metastabiili tila ja resonaattori liittyvät asiaan, (iv) miten kohdat (i)–(iii) saadaan otettua huomioon puolijohteiden tapauksessa, (v) miten $pn$-liitos liittyy asiaan ja (vi) mitä sovelluskohteita puolijohdelasereille löytyy ja miksi. Elävöitä vastaustasi tarpeen mukaan kivoilla kuvilla. (8p)

**Aputietoja**
Yleisiä relaatioita:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = \Big/_{a}^{b} f(x) g(x) - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

$$\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Luonnonvakioita:
$h \approx 7 \cdot 10^{-34}$ Js, $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, $e \approx 2 \cdot 10^{-19}$ C, $k_B \approx 1 \cdot 10^{-23}$ J/K, $m_e \approx 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ 1/mol, $\mu_B \approx 9 \cdot 10^{-24}$ J/T, $E_0 \approx 13{,}6$ eV, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$.

Landén tekijä:

$$\langle g \rangle = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$