Mat-1.3621 Tilastollinen päättely

Tentti 15.12.2012 / Mellin

Kirjoita **selvästi jokaiseen koepaperiin** alla mainitussa järjestyksessä:

- Mat-1.3621 TilPäät / Tentti 15.12.2012
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi, kaikki etunimet
- koulutusohjelma, vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

Tentissä saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa hyväksyttyä laskinta ja Mellinin kaava- ja taulukkokokoelmia.

1. (Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ satunnaisotos jakaumasta, jolle $\mathrm{E}(X) = \mu \neq 0$ ja $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Tarkastellaan parametria

$$1/\mu$$

Olkoon

$$1/\bar{X}$$

jossa

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

on parametrin $1/\mu$ *pistoke-estimaattori*. Mikä on estimaattorin $1/\bar{X}$ *asymptoottinen jakauma*?

Ohje: Estimaattorin $1/\bar{X}$ asymptoottinen jakauma voidaan saada selville soveltamalla *delta-menetelmää*.

2. (a) Selitä ensin lyhyesti käsitteet *tyhjentävyys*, *minimaalinen tyhjentävyys*.

(b) Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ satunnaisotos *eksponenttijakaumasta* $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Todista, että tunnusluku

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

on *minimaalisesti tyhjentävä* parametrille λ.

Eksponenttijakauman tiheysfunktio:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}\,,\ \lambda > 0\,,\ x \geq 0$$

3. (a) Selitä ensin lyhyesti käsitteet *harhaton estimaattori*, *paras harhaton estimaattori*.

(b) Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ satunnaisotos *Poisson-jakaumasta* Poisson(λ). Tunnusluvut

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ja

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

ovat molemmat *harhattomia* parametrille λ (miksi?). Todista, että $\bar{X}$ on em. estimaattoreista *parempi*.

Poisson-jakauman pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\ , \lambda > 0\ , x = 0,1,2,\ldots$$

4. (a) Selitä ensin lyhyesti käsitteet *testi*, *testisuure*, *hylkäysalue*, *hyväksymisalue*, *hylkäysvirhe*, *hyväksymisvirhe*, *testin voimakkuus*, *merkitsevyystaso*, *kriittinen alue*, *p-arvo*.

(b) Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ satunnaisotos *normaalijakaumasta* parametrein μ ja σ_0^2, jossa varianssi σ_0^2 on tunnettu. Konstruoi *osamäärätesti* nollahypoteesille

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

kun vaihtoehtoisena hypoteesina on

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

Normaalijakauman tiheysfunktio:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], -\infty < \mu < +\infty\ , \sigma > 0\ , -\infty < x < +\infty$$

5. (a) Selitä ensin lyhyesti käsitteet *luottamusväli*, *luottamustaso*, *luottamuskerroin*.

(b) Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos *normaalijakaumasta* $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Konstruoi varianssiparametrille σ^2 *luottamusväli* luottamustasolla $1 - \alpha$.

Normaalijakauman tiheysfunktio:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], -\infty < \mu < +\infty\ , \sigma > 0\ , -\infty < x < +\infty$$