Aalto-yliopisto
Teknillisen fysiikan laitos

Tfy-0.2062 Fysiikka 6 **Tentti, 11.1.2013**

Hakola, Kurki-Suonio

Kurssin voi suorittaa vaihtoehdon A tai B mukaisesti.
Vaihtoehto A: vastaa valintasi mukaan **neljään** tehtävään. Kurssiarvosana määräytyy sekä tämän tentin että laskuharjoituspisteittesi perusteella.
Vaihtoehto B: vastaa **kaikkiin** tehtäviin. Kurssiarvosana määräytyy tämän tentin perusteella.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi paperiin, kumman vaihtoehdon olet valinnut! Mikäli tämä ei käy selvästi ilmi tai vaihtoehdosta A huolimatta vastaat viiteen tehtävään, koe arvostellaan vaihtoehdon B mukaisesti. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä mitään apumateriaalia. Voit vastata kysymyksiin suomeksi, ruotsiksi tai englanniksi. Huomaa myös kokeen lopussa oleva aputietolista.

1. Tarkastellaan tässä tehtävässä kvanttimekaanista hiukkasta, jota kuvataan aaltofunktiolla

$$\psi(x) = Ae^{-|x|/L},$$

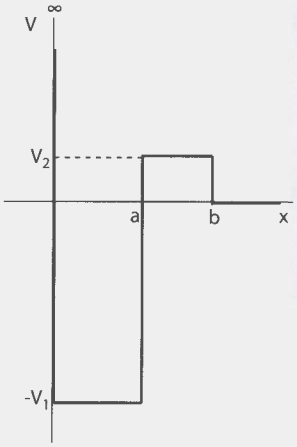
missä A ja L ovat vakioita.

a) Määritä vakio A siten, että aaltofunktio on oikein normitettu. (1,5p)

b) Laske paikan odotusarvo $\langle x \rangle$ sekä keskihajonta Δx tarkastelemallemme hiukkaselle. Muista osittaisintegrointi! Mitä huomaat? (3p)

c) Laske paikkataajuusspektri $\phi(k)$ funktiolle $\psi(x)$. Piirrä sekä $\psi(x)$:n että $\phi(k)$:n kuvaajat arvoilla $L = 1$ ja $L = 0{,}1$ ja arvioi kuvien avulla tulon $\Delta x \Delta k$ suuruutta. Mitä huomaat nyt? (3,5p)

2. Tarkastellaan kuvan 1 mukaisessa yksiulotteisessa potentiaalissa elelevää hiukkasta (hiukkasen massa on m ja kokonaisenergia E). Tällaisella mallilla voitaisiin esimerkiksi kuvata ydintä sekä sitä reunustavaa Coulombin repulsiosta aiheutuvaa vallia. Kirjoita ja ratkaise hiukkasta kuvaava, *ajasta riippumaton Schrödingerin yhtälö* kussakin fysikaalisesti erilaisessa alueessa. Kirjoita myös näkyviin tarpeelliset yhtälöt, joista on mahdollista selvittää vastauksessasi esiintyvät määräämättömät kertoimet (yhtälöitä ei kuitenkaan tarvitse ratkaista). Piirrä näkyviin laskemasi aaltofunktion kuvaajat tapauksissa $-V_1 < E < 0$ ja $0 < E < V_2$. Kiinnitä huomiota aaltofunktion jatkuvuusominaisuuksiin, amplitudiin sekä aallonpituuteen. (8p)



$\int fg' = fg - \int f'g$

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V\psi$

$i\hbar \frac{X f'}{f} = -\frac{\hbar^2}{2m} f \frac{X''}{X} + V \cancel{xf} = E$

Kuva 1: Potentiaali tehtävän 2 hiukkaselle: $V(x) = \infty$, kun $x < 0$; $V(x) = -V_1$, kun $0 \leq x \leq a$; $V(x) = V_2$, kun $a < x \leq b$; $V(x) = 0$, kun $x > b$.

KÄÄNNÄ

3. Lähdetään tässä tehtävässä liikkeelle vetyatomin elektronia kuvaavista aaltofunktioista $\psi_1 \equiv \psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}$, $\psi_2 \equiv \psi_{200}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/(2a_0)}$ ja $\psi_3 \equiv \psi_{211}(r,\theta,\phi) = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{r}{a_0}e^{-r/(2a_0)}\sin\theta e^{i\phi}$.

   a) Mitä voimme sanoa elektronin kulmaliikemäärästä L ja energiasta E elektronin ollessa jollakin tiloista ψ_1, ψ_2 tai ψ_3? (1p)

   b) Vetyatomimme elektroni on jostain syystä päätynyt superpositiotilaan $\Psi = A\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{1}{4}\psi_3$. Määritä vakio A ja kerro tämän jälkeen, mitä nyt tiedämme elektronin kulmaliikemäärästä L ja energiasta E. (3p)

   c) Heliumatomin voi keskeiskenttäapproksimaatiossa ajatella koostuvan kahdesta päällekkäisestä, vetyatomin kaltaisesta systeemistä. Olettamalla että atomin elektronit eivät vuorovaikuta keskenään lainkaan arvioi heliumatomin kokonaiskulmaliikemäärän J sekä perustilan energian E (kokeellinen arvo -79 eV) suuruutta. (4p)

4. Kurssin kuluessa on useasti puhuttu alkuaineiden absorptio- ja emissiospektreistä. Kuvassa 2 on esitetty sekä vedyn että heliumin emissiospektrit näkyvän valon alueella (noin 400–700 nm). Kirjoita nyt 1–2 sivun pituinen essee, jossa yksityiskohtaisesti selität, miten spektrit ovat muodostuneet ja minkälaista rakennetta yksittäisistä spektriviivoista rupeaa tarkkaan tutkittaessa löytymään. Kerro myös, mitä viivoille tapahtuu, kun tarkastelemamme (kaasumaiset) atomit joutuvat magneettikenttään. Kiinnitä vastauksessasi erityistä huomiota energiatilojen degeneraatioon, kokonaiskulmaliikemäärään, hienorakenteeseen sekä heliumin tapauksessa aaltofunktioiden symmetriavaatimuksiin. (8p)

5. Tässä tehtävässä paneudumme suuren hiukkasjoukon ominaisuuksiin tilastollisen fysiikan näkökulmasta.

   a) Hiukkasjoukkomme voi noudattaa Maxwell–Boltzmann-, Fermi–Dirac- tai Bose–Einstein-statistiikkaa. Kirjoita kunkin statistiikan tapauksessa jakaumafunktion (eli miten hiukkaset ovat asettuneet eri energiatiloille) lauseke niin hyvin kuin muistat. Piirrä huolellisesti jakaumafunktioiden kuvaajat sekä korkeassa että matalassa lämpötilassa. Vertaile piirtämiäsi käyriä keskenään. (2,5p)

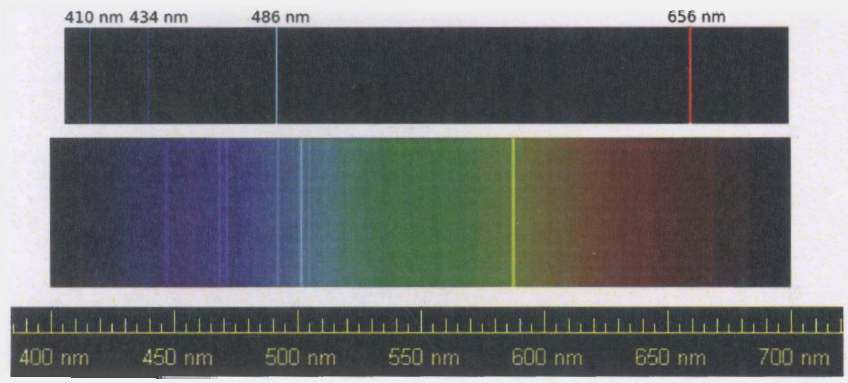
   b) Mitä yllämainituista kolmesta jakaumasta käyttäisit tutkiessasi kromin (Cr, elektronikonfiguraatio $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s$) valenssielektronien muodostamaa hiukkasjoukkoa lämpötilassa 273 K? Miten tilanne muuttuisi, jos lämpötila olisi 27300 K tai 2,73 K? Perustele näkemyksesi huolellisesti! (2,5p)

   c) Laske kromin valenssielektronien keskimääräinen energia lämpötilassa 273 K. Laskun helpottamiseksi kannattaa tehdä perusteltuja oletuksia ja approksimaatioita matkan varrella. Kromin tiheys on $\rho_m \approx 6 \cdot 10^3$ kg/m^3 ja moolimassa $M \approx 52$ g/mol. (3p)

Aputietoja

Luonnonvakioita:

$h \approx 7 \cdot 10^{-34}$ Js, $E_0 \approx 13{,}6$ eV, $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ 1/mol, $e \approx 2 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e \approx 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $k_B \approx 1 \cdot 10^{-23}$ J/K, $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s



Kuva 2: Vedyn (yllä) ja heliumin (alla) emissiospektrit näkyvän valon alueella.