

Perustele vastauksesi huolella.
Laskimen käyttö ei ole sallittu.

- (1) Tarkastellaan kompleksitason kuvausta $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$z = x + iy \mapsto e^y \cos x + ie^y \sin x$$

- (a) Onko f analyyttinen?
(b) Mihin f kuvaa kompleksitason alueen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$?

- (2) Muodosta funktion

$$z \mapsto \frac{3}{2 + z - z^2}$$

Laurentin kehitelmä alueessa

- (a) $|z| < 1$,
(b) $1 < |z| < 2$,
(c) $|z| > 2$.

- (3) Määää integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{5 - 4 \cos \theta}.$$

- (4) Tarkastellaan avaruutta $C([-1, 1])$ varustettuna sisätulolla $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.
Konstruoi Gram-Schmidt-menetelmän avulla ortonormaali kanta aliavaruudelle $\operatorname{Span}(1, x, x^2)$.
- (5) Oletetaan, että A on reaalinen $m \times n$ -matriisi. Näytä, että $N(A) = C(A^T)^\perp$, missä $N(A)$ on matriisin nolla-avaruus ja $C(A^T)$ sen transpoosin sarakeavaruus.
- (6) Oletetaan, että A on kompleksinen hermiittinen neliömatriisi. Näytä, että matriisin A ominaisarvot ovat reaalisia ja että eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaalisia.