Aalto-yliopisto
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Huhtanen/Kinnunen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

1. välikoe 15.2.2013 klo 10:00-12:00.

1. Tutki ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia. Jos väite on tosi, niin pelkkä vastaus riittää ja jos väite on epätosi, nin perustele vastauksesi lyhyesti.

   (1) On olemassa sellainen funktio $f \in L^2([-\pi,\pi])$, että $\widehat{f}(j) = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}$.

   (2) Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sin(t)$ Fourierin sarja suppenee pisteessä $t = 0$.

   (3) Napakoordinaateissa esitetty funktio
   $$u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t)(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta - t) + r^2}\,dt$$
   on harmoninen tason yksikkökiekossa.

   (4) On olemassa sellainen funktio $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, että $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx = 1$ ja $\widehat{f}(1) = 100$.

   (5) On olemassa sellainen funktio $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, että
   $$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |\xi| < 1 \\ 0, & \text{kun } |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

   (6) Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2/2}$, niin $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} f(\xi)$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}$.

2. (a) Laske funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$
   $$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq \pi, \end{cases}$$
   Fourierin kertoimet $\widehat{f}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

   (b) Selosta lyhyesti, miten Fourierin sarja liittyy tason yksikkökiekon Dirichletin ongelman
   $$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1, \\ u(x) = f(x), & \text{kun } x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = 1, \end{cases}$$
   ratkaisemiseen.

3. (a) Miten määritellään funktioiden $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ konvoluutio $f * g$?

   (b) Johda kaava $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.