

2. välikoe 15.3.2013 klo 10:00-12:00.

1. Alla on kuusi kurssilla esiintynyttä funktiota. Lausekkeissa olevien funktioiden oletetaan olevan riittävän sileitä ja riittävän hyvin integroituvia. Minkä ongelman ratkaisuja ne ovat? Anna myös mahdolliset alku- ja reuna-arvot sekä lähdeterminit. Pelkkä ongelman täsmällinen muotoilu riittää.

$$(a) u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy, x \in \mathbb{R}^3.$$

$$(b) u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

$$(c) u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds, x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

$$(d) u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds, \\ x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

$$(e) u(x, t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} (h(y)t + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x)) dS(y), x \in \mathbb{R}^3, \\ t > 0.$$

$$(f) u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(y, t - |y-x|)}{|y-x|} dy, x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

2. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko, $T > 0$ ja $u, v \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ ovat lämpöyhtälön ratkaisuja joukossa $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

(a) Muotoile vertailuperiaate lämpöyhtälön ratkaisuille u ja v joukossa Ω_T . Pelkkä täsmällinen muotoilu riittää, vertailuperiaatetta ei tarvitse todistaa.

(b) Todista seuraava stabiilisuustulos vertailuperiaatteen avulla: Jos $\varepsilon > 0$ ja $|u - v| \leq \varepsilon$ parabolisella reunalla $\Gamma_T = (\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$, niin $|u - v| \leq \varepsilon$ joukossa Ω_T .

3. Oletetaan, että $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, ja määritellään

$$U(x, r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(\dot{y}),$$

missä $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ja $\alpha(n)$ on yksikköpallon tilavuus avaruudessa \mathbb{R}^n .

(a) Näytä, että $\lim_{r \rightarrow 0} U(x, r) = u(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Näytä, että

$$\frac{\partial U}{\partial r}(x, r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Vihje: Greenin kaava on $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dy = - \int_{\Omega} v \Delta u dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS$.

(c) Näytä, että $U(x, r) = u(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$, jos u on harmoninen avaruudessa \mathbb{R}^n .