Aalto-yliopisto Hyvönen/Kinnunen
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

4. välikoe 8.5.2013 klo 10:00-12:00.

1. Muodosta reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 1, & x \in (0,1), \\ -u'(0) = 0, \quad u'(1) = 1, & \end{cases} \tag{1}$$

variaatioformulaatio. Mikä on tässä tapauksessa testifunktioavaruus V?

Hae variaatioformulaation avulla tehtävän (1) ratkaisulle Galerkin-approksimaatio aliavaruudesta

$$V_h = \text{span}\,\{1, x\} \subset V.$$

(Riittää, että muodostat Galerkin-approksimaatiota vastaavan matriisiyhtälön, mutta sinun ei tarvitse ratkaista sitä.)

2. Kun aaltoyhtälön Dirichletin alku- ja reuna-arvo-ongelma

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

paikkadiskretoidaan, päädytään tavalliseen toisen asteen alkuarvo-ongelmaan

$$(u^h)''(t) = \Delta^h_{D-D}\, u^h(t), \qquad u^h(0) = f^h, \quad (u^h)'(0) = g^h, \tag{2}$$

kaikilla $t \geq 0$. Tässä $f^h = [f(x_1), \ldots, f(x_m)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $g^h = [g(x_1), \ldots, g(x_m)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ ja $u^h(t) \approx [u(x_1,t), \ldots, u(x_m,t)]^{\mathrm{T}}$, missä $x_j = jh$ ja $h = 1/(m+1)$ on hilavakio. Lisäksi $\Delta^h_{D-D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ on differenssimatriisi Dirichletin reunaehdoilla.

Johda tehtävän (2) ratkaisemiseksi kaksiaskelmenetelmä, joka tuottaa jonon $u^h_k \approx u^h(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, missä $t_k = k\delta$ ja $\delta > 0$ on aika-askel:

(a) Kirjoita iteraatille u^h_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$, rekursiokaava käyttäen jonon kahta edellistä alkiota u^h_k ja u^h_{k-1} sekä perusdifferenssiapproksimaatiota

$$v''(t) \approx \frac{1}{\delta^2}\big(v(t+\delta) - 2v(t) + v(t-\delta)\big).$$

(b) Käynnistä iteraatio muodostamalla "approksimaatiot" kahdelle ensimmäiselle iteraatille u^h_0 ja u^h_1. (Vihje: Käytä u^h_1:n tapauksessa katkaistua Taylorin sarjaa.)

3. Kun lämpöyhtälön alku- ja reuna-arvo-ongelma

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{3}$$

paikkadiskretoidaan päädytään tavallisen differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelmaan

$$(u^h)'(t) = \Delta^h_{D-N}\, u^h(t), \qquad u^h(0) = f^h, \tag{4}$$

kaikilla $t \geq 0$. Tässä $f^h = [f(x_1), \dots, f(x_m)]^{\mathrm{T}}$ ja $u^h(t) \approx [u(x_1,t), \dots, u(x_m,t)]^{\mathrm{T}}$, missä $x_j = jh$ ja $h = 1/(m+1)$ on hilavakio.

Miksi tehtävässä (4) esiintyy nimenomaan differenssimatrissi $\Delta^h_{D-N} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, eikä esimerkiksi Δ^h_{N-N}?

Soveltamalla implisiittistä Eulerin menetelmää paikkadiskretoituun tehtävään (4) muodosta ongelmalle (3) numeerinen ratkaisumenetelmä, joka tuottaa jonon $u^h_k \approx u^h(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$, missä $t_k = k\delta$ ja $\delta > 0$ on aika-askel.

Todista, että ratkaisujonolle u^h_k, $k = 0, 1, \dots$, pätee

$$\lim_{k\to\infty} u^h_k = 0 \in \mathbb{R}^m.$$

Onko tämä toivottu ominaisuus? Miksi?

Voit käyttää hyväksi seuraavia tietoja:

- Tavallisen differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelmalle $y'(t) = g(t, y(t))$, $y(0) = y_0$, implisiittinen Eulerin menetelmä on muotoa

  $$y_{k+1} = y_k + \delta g(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

- Matriisin $\Delta^h_{D-N} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ominaisarvot toteuttavat ehdon $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{m-1} > \lambda_m > -4/h^2$.
- Mille tahansa matriisille $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ pätee

  $$\lim_{k\to\infty} B^k = 0 \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

  jos B:n ominaisarvot $\mu_1, \dots, \mu_m$ toteuttavat $|\mu_j| < 1$, $j = 1, \dots, m$.