

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Mat-1.1110 Matematiikan peruskurssi C1
Tentti 10.01.2013

Joensuu/Nummenpalo

Laskimet eivät sallittuja. Tee joko tentti tai yksi uusintavälikokeista. Muista perustella vastauksesi.

Avuksi tehtäviin: $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, ja trigonometristen funktioiden arvoja:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|----------------------|--------|
| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | 2π |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

Tentti

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -5$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -7$$

$$-2x_1 + 4x_3 = 6.$$

2. a) Etsi alkion 17 kertolaskun käänteisalkio joukossa \mathbb{Z}_{127} .
 b) Olkoon p alkuluku ja lisäksi $p \neq 2$ ja $p \neq 5$. Osoita, että on olemassa p :llä jaollinen luku n 10-järjestelmässä siten että luku n muodostuu pelkistä yhdeksikoistä.
3. a) Onko $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 2x_2 + x_4\}$ vektoriavaruuden \mathbb{R}^4 aliavaruus?
 b) Olkoot vektoriavaruuden V vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ lineaarisesti riippumattomat. Ovatko vektorit $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4, -\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5, 2\mathbf{v}_5$ lineaarisesti riippumattomat?
4. a) Laske integraali $\int x(\ln x)^3 dx$.
 b) Laske sijoituksella $x = 1/t$ integraali

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}}, \quad x > 0.$$

5. Etsi se parametrinen käyrän $x = 2 \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ tangentti, joka koordinaattiakselien kanssa rajoittaa mahdollisimman pienen kolmion.

1. välikoe

1. a) Sievennä muotoon $a + bi$ kompleksiluku

$$\frac{1+i}{i(2+3i)}$$

- b) Piirrä kuva yhtälön $\bar{z} = 2/z$ kompleksilukuratkaisuista.

2. Määritellään luonnollisen luvun kertoma: $1! = 1$ ja $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Osoita induktiolla, että $(2n)! \geq (n!)^2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

3. a) Etsi alkion 17 kertolaskun käänteisalkio joukossa \mathbb{Z}_{127} .

- b) Olkoon p alkuluku ja lisäksi $p \neq 2$ ja $p \neq 5$. Osoita, että on olemassa p :llä jaollinen luku n 10-järjestelmässä siten että luku n muodostuu pelkistä yhdeksikoistä.

4. Graafin G naapurilistaesitys on

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 5 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 7 | 4 | | 6 | 7 | 6 | 5 |
| 7 | 8 | | 8 | | 8 | | 8 | 7 |

- a) Etsi graafista G jokin Eulerin polku, jos sellainen on olemassa.
b) Etsi graafista G jokin Eulerin kierros, jos sellainen on olemassa.
c) Määrää kromaattinen luku $\chi(G)$.

2. välikoe

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -5$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -7$$

$$-2x_1 + 4x_3 = 6.$$

2. Millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvoilla matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

on kääntyvä? Etsi käänteismatriisi A^{-1} näillä vakion a arvoilla.

3. a) Onko $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 2x_2 + x_4\}$ vektoriavaruuden \mathbb{R}^4 aliavaruus?
- b) Olkoot vektoriavaruuden V vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ lineaarisesti riippumattomat. Ovatko vektorit $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4, -\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5, 2\mathbf{v}_5$ lineaarisesti riippumattomat?
4. Diagonalisoi, jos mahdollista, matriisi

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. välikoe

1. Etsi käyrän $y = (3 - x^2)^2$ käännepisteet.
2. Laske raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x + x^2} - \frac{1}{2x} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$.

3. a) Laske integraali $\int x(\ln x)^3 dx$.
- b) Laske sijoituksella $x = 1/t$ integraali

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}}, \quad x > 0.$$

4. Etsi se parametrinen käyrän $x = 2 \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ tangentti, joka koordinaattiakselien kanssa rajoittaa mahdollisimman pienen kolmion.