Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Matematiikan laitos

Malmivuori/Oja,Karrila

Mat-1.1720 Matematiikan peruskurssi V2

1 välikoe 18.6.2013 klo 16-19

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodikohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TIK, TLT, TUO, YYT

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

Calculator is allowed. Exam time is 3 hours.

1 Millä x:n arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\quad 1)^n \frac{(x \quad 3)^n}{(n+1)^3 e^{n+3}}$$

(a) suppenee itseisesti,
(b) suppenee, mutta ei itseisesti,
(c) hajaantuu?

Determine the values of x for which the series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\quad 1)^n \frac{(x \quad 3)^n}{(n+1)^3 e^{n+3}}$$

(a) converge absolutely,
(b) converge conditionally,
(c) diverge.

2. Tutki määritelmän avulla onko funktio

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) jatkuva (0,0):ssa,
(b) differentioituva (0,0):ssa.
(c) Määrää funktion f osittaisderivaatat (0,0):ssa.

By using the definitions determine is the function

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) continuous at (0,0),
(b) differentiable at (0,0)
(c) Determine the partial derivatives of the funktion f at (0,0)

3. Laske funktion $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ maksimi- ja minimiarvo joukossa $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Determine the maximum and minimum values of the function $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ on the set $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

4. Yhtälön $y = ae^x$ tiedetään olevan voimassa muuttujien x ja y välillä.

On annettu kokeellinen aineisto (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Määritä vakion a arvo pienimmän neliösumman menetelmällä.

The realitonship $y = ae^x$ is known to hold between the variables x and y Given the experimental data (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, determine a value for a by the method of least squares.

Kaavoja ilman selityksiä / Equalities without explanations:

$$\bar{t}_1 = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{k}, \quad \bar{t}_2 = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathbf{k}$$

$$\bar{n} = \bar{t}_2 \times \bar{t}_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} = \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_x(a,b) - hf_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$D\,f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

$$f(a+h,b+k) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a,b) h^j k^{m-j}$$

$$Hess\, f(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{xy}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix}$$

$$L(x_1,x_2,\ \ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ \ldots,x_n) - \lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_n) - \ldots - \lambda_m g_m(x_1,\ldots,x_n)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ \frac{d}{dx}(f(g(x)) &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

$$\sin(0) = 0$$
$$\cos(0) = 1$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)$$

$$e = 2,718281828459045$$