

Mat-1.2620 Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Tentti / 1.vk / 2.vk 27.05.2013 / Aro/Häme

Kirjoita **selvästi** jokaiseen koepaperiin alla mainitussa järjestyksessä:

- Mat-1.2620 Tentti/1.vk/2.vk (**merkitse oikea vaihtoehto**) SovTnB 27.05.2013
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

Lue **tarkasti** seuraavat ohjeet:

- (1) Jos olet suorittamassa 1. välikoetta, vastaa kysymyksiin 1-2 ja 6.
- (2) Jos olet suorittamassa 2. välikoetta, vastaa kysymyksiin 3-5 ja 7.
- (3) Jos olet suorittamassa kurssia tentillä, vastaa kysymyksiin 1-5.
- (4) Jos olet suorittamassa 1. välikoetta normaaleilla maksimipisteillä ja saanut siihen erikoisluvan, vastaa kysymyksiin 1, 2, 6 ja 8.
- (5) Jos olet suorittamassa 2. välikoetta normaaleilla maksimipisteillä ja saanut siihen erikoisluvan, vastaa kysymyksiin 3-5, 7 ja 9.

Tentin kesto on 4 tuntia (vaihtoehto 3). Välikokeiden kesto on 3 tuntia (vaihtoehdot 1, 2, 4 ja 5).

Merkitse vastauspapereihisi selvästi mitä vaihtoehtoa olet suorittamassa!

Sallitut apuvälineet: *Laskin ja Mellinin kaava- ja taulukkokokeelmat.*

Vastausohjeet: **Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Esimerkiksi pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä.**

1. (a) Paikkakuntien X ja Y välillä on kolmet liikennevalot K, L, M. Valojen jaksona on 1 minuutti, jona aikana liikennevalo K näyttää punaista 15 sekuntia, L näyttää punaista 20 sekuntia ja M näyttää punaista 30 sekuntia. Laske todennäköisyys, että matkalla on pysähdyttävä täsmälleen yhden kerran.
(b) Arvioidaan, että 1% väestöstä on eräs tauti. Kyseisen taudin toteamiseksi on kehitetty testi, joka ei aina anna oikeata tulosta siten, että jos henkilöllä on tauti niin testi antaa tähän viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.95. Jos henkilöllä ei ole tautia niin testi antaa tautiin viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.06.
Mikä on todennäköisyys, että tietyllä henkilöllä on tauti, jos testi antaa tähän viittaavan tuloksen?
2. Tehdas valmistaa tuotetta, jolla on erittäin korkeat laatuksiteerit. Keskimäärin vain 60 % tuotteista täyttää kriteerit. Poimitaan tuotteita tarkastettavaksi satunnaisesti yksi kerrallaan.
Tehtävä 1: Mikä on todennäköisyys sille, että joudumme tarkastamaan vähintään 4 tuotetta ensimmäisen viallisen tuotteen löytämiseksi?

Tehtävä 2: Mikä on odotettavissa oleva lukumäärä tuotteille, jotka joudumme tarkastamaan ensimmäisen viallisen tuotteen löytämiseksi?

Tehtävä 3: Mikä on todennäköisyys, että joudumme tarkastamaan ainakin 5 tuotetta kolmannen viallisen tuotteen löytämiseksi?

3. Muuttujien x ja y havaitut arvot ovat:

x	-3	-1	0	1	2	3
y	4	2	1	0	0	2

(a) Määrää tavanomaisen yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 pienimmän neliösumman (PNS-) estimaatit.

(b) Määrää estimoidun mallin residuaali pisteessä $x=2$.

(c) Määrää estimoidun mallin selitysaste R^2 .

4. Kokeessa verrattiin menetelmiä A ja B englannin opetuksessa.

Kokeeseen valittiin peruskoulun 1. luokan oppilaiden joukosta 7 oppilasparia siten, että jokaisessa parissa kummankin oppilaan ikä kuukausina, sukupuoli, älykkyys, terveys, sosiaalinen tausta jne. olivat mahdollisimman samankaltaisia. Toinen *sovitetun parin* jäsenistä valittiin arvalla saamaan opetusta menetelmällä A ja toista opetettiin menetelmällä B.

Opetusjakson jälkeen kaikki kokeessa mukana olleet oppilaat joutuivat samaan testiin. Tulokset testistä (testipisteet) on annettu alla (korkeampi pistemäärä osoittaa parempaa englannin taitoa).

Pari	Menetelmä	
	A	B
1	73	74
2	76	71
3	95	91
4	69	71
5	68	71
6	94	81
7	56	55

Testaa 5 %:n merkitsevyystasoa käyttäen nollahypoteesia, että menetelmät A ja B tuottavat ko. testillä mitattuna keskimäärin yhtä hyviä tuloksia, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että menetelmät eivät tuota yhtä hyviä tuloksia.

5. Valimo valmistaa palkkeja. Palkkien paksuus (tuumaa) vaihtelee satunnaisesti noudattaen normaalijakaumaa odotusarvona μ ja varianssina σ^2 , jotka ovat tuntemattomia. Palkkien joukosta poimittiin yksinkertainen satunnaisotos jonka koko oli $n=7$ ja mitattiin palkkien paksuus: 9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0, 10.2, 9.6.
- (a) Määrää odotusarvon ja varianssin harhattomat estimaatit.
- (b) Määrää 95 %:n luottamusväli palkkien paksuuden odotusarvolle.

6. Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2ax, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- (a) Määrää vakion $a < 0$ arvo.
- (b) Määrää satunnaismuuttujan X kertymäfunktio.
- (c) Määrää tapahtuman $X = 0.5$ todennäköisyys.
- (d) Määrää tapahtuman $0 \leq X \leq 0.25$ todennäköisyys tiheysfunktion avulla.
- (e) Määrää tapahtuman $0 \leq X \leq 0.25$ todennäköisyys kertymäfunktion avulla.
7. Tutkimuksessa todettiin, että kuulalaakerin kuulien eksentrisyyden (muuttuja x) ja pinnan tasaisuuden (muuttuja y) välinen korrelaatio oli $r_{xy} = 0.1$.
- Testaa 5 %:n merkitsevyystasoa käyttäen nollahypoteesia, että muuttujat x ja y ovat korreloimattomia, kun vaihtoehtoiseksi hypoteesiksi valitaan kaksisuuntainen vaihtoehto ja otoskokona on
- (a) 102
- (b) 502

Huom. Oletamme, että havainnot

$$(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$$

noudattavat *kaksiulotteista normaalijakaumaa*

$$N_2(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho_{xy}).$$

8. Heität virheetöntä noppaa 24000 kertaa. Mikä on todennäköisyys, että kuutosten lukumäärä on suljetulla välillä [3920, 4160]? Käytä normaalijakauma-aproksimaatiota.
9. Sparks Electric Institute on julkaissut lukuja, jotka kertovat kuinka monta kilowattituntia eri kodin sähkölaitteet kuluttavat vuosittain. Se väittää, että pölynimuri kuluttaa keskimäärin 46 kilowattituntia vuodessa.

Valitaan 12 pölynimurin suuruinen yksinkertainen satunnaisotos, ja kirjataan imurien vuosittainen kilowattituntien kulutus. Aritmeettiseksi keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = 42$ ja otosvarianssiksi $s^2 = 141.61$. Löytyykö tästä riittävästi todisteita 5% merkitsevyystasolla, että pölynimurit kuluttavat keskimäärin vähemmän kuin 46 kilowattituntia vuosittain? Oleta, että pölynimurin vuosittain kuluttamien kilowattituntien määrä on normaalijakautunut.