Mat-2.3140 Lineaarinen ohjelmointi **Toppila/Kivistö**
Tentti **14.04.2012**

Tentissä on neljä tehtävää, jotka arvosteellaan asteikolla 0-6. Tehtävien alakohdat ovat keskenään samanarvoisia ellei toisin mainita.

Tehtävä 1

Ovatko seuraavat väittämät oikein vai väärin? Perustele vastauksesi.

(a) Tyhjä joukko on monitahokas.
(b) Standardimuotoisen tehtävän käyvässä pisteessa on kaikkien rajoitteiden oltava aktiivisia.
(c) Jokaista standardimuotoisen tehtävän käypää kulmapistettä vastaa yksikäsitteinen käypä kanta.
(d) Minimikustannusvirtaustehtävän optimaalinen kustannus on negatiivinen ääretön jos ja vain jos verkossa on kiertokulku (*cycle*).

Vastaus

(a) Oikein. Se voidaan esittää muodossa $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 1, x \leq 0\}$
(b) Oikein. Standadimuotoisen tehtävän käypä alue on muotoa $Ax = b, x \geq 0$ ja sen i:s rajoite on aktiivinen, jos $a_i^T x = b_i$. Jos rajoite i ei olisi aktiivinen pätisi $a_i^T x \neq b_i$, jolloin piste x ei olisi käypä. (Huomatkaa, että epänegatiivisuusrajoituksia ei määritelmän mukaan lasketa kun määritetään rajoitusten aktiivisuutta.)
(c) Väärin. Jos tehtävä on degeneroitunut, voi useampi kanta vastata samaa kulmapistettä.
(d) Väärin. Kiertokulun on oltava myös kustannusta pienentävä ja rajoittamaton.

Tehtävä 2

Mallinna oheiset ongelmat lineaarisen ohjelmoinnin tehtävinä (3 p). Selitä molemmissa tapauksissa miksi ja miten käyttämäsi mallinnustekniikat toimivat (3 p).

(a) Maalia yritetään toimittaa mahdollismmin edullisesti 10 kg tammi-, 10 kg helmi- ja 50 kg maaliskuussa. Oman tuotannon hinta on 10 EUR/kg ja määrältään enintään 20 kg/kk, mutta tuotantoa voidaan täydentää ostamalla maalia ulkopuoliselta hintaan 20 EUR/kg. Maalia voi myös varastoida hintaan 5 EUR/kg/kk.
(b) Minimoi $\max\{|x_1 + 2|, |x_1| + x_2\}$ siten että $2|x_1| + |x_2| \leq 1$.

Vastaus

(a) Olkoon $0 \leq x_i \leq 20$ tuotettujen ja $y_i \geq 0$ ostettujen määrä kuussa $i = 1, 2, 3$, sekä $z_j \geq 0$ varastoitujen tuotteiden määrä kuussa $j = 1, 2$. Tällöin tuotannon hinta on $10 \cdot \sum_{i=1}^3 x_i$, ostojen hinta $20 \cdot \sum_{i=1}^3 y_i$ ja varastoinnin hinta $5 \cdot \sum_{j=1}^2 z_j$, ja tavoitteena on minimoida näiden hintojen summaa. Se määrä tuotetusta ja ostetusta maalista jota ei käytetä kysynnän tyydyyttämiseen varastoidaan. Koska tuotanto, osto ja varasto ovat epägegatiivisia, voidaa tämä ilmaista tammikuun osalta rajoitteella $x_1 + y_1 - z_1 = 10$, helmikuun osalta rajoitteella $x_2 + y_2 + z_1 - z_2 = 10$ ja huhtikuun osalta rajoitteella $x_3 + y_3 + z_2 = 50$. Tehtäväksi saadaan

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 20y_1 + 20y_2 + 20y_3 + 5z_1 + 5z_2 \\
\text{s.e.} \quad & x_1 + y_1 - z_1 = 10 \\
& x_2 + y_2 + z_1 - z_2 = 10 \\
& x_3 + y_3 + z_2 = 50 \\
& x_1 \leq 20 \\
& x_2 \leq 20 \\
& x_3 \leq 20 \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2 \geq 0 \ .
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\min(\max\{|x_1 + 2|, |x_1| + x_2\}) \\
2|x_1| + |x_2| \leq 1
\end{aligned}
$$

Maksimi voidaan poistaa huomaamalla että $\max\{a, b\}$ on pienin luku z s.e. $a \leq z$ ja $b \leq z$ (0.5 p). Näin ollen jos z minimoidaan on optimissa ainakin toinen näistä epäyhtälöistä on yhtäsuuri, jolloin $z^* = \max\{a^*, b^*\}$, missä $*$ viittaa muuttujan/lineaarisen lausekkeen arvoon optimissa (0.5 p). Itseisarvo voidaan poistaa huomaamalla, että $|x| = \max\{x, -x\}$, jolloin edellinen tekniikka pätee (0.5 p). Näitä soveltamalla saadaan tehtäväksi

$$\begin{aligned} &\min z_4 \\ 2z_1 + z_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq z_1 \\ -x_1 &\leq z_1 \\ x_2 &\leq z_2 \\ -x_2 &\leq z_2 \\ x_1 + 2 &\leq z_3 \\ -x_1 - 2 &\leq z_3 \\ z_3 &\leq z_4 \\ z_1 + x_2 &\leq z_4 \ . \end{aligned} \qquad (1.5\ p)$$

Tehtävä 3

(a) Tutki seuraavan tehtävän käypyyttä kaksivaihesimplexillä (I vaihe riittää). Todenna havaintosi graafisesti. (4 p)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 6x_2 \\ \text{s.e.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 = 3 \\ & -x_1 + 2x_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ . \end{aligned}$$

(b) Miten Farkasin lemma liittyy joukkoihin $\{x \in \mathbb{R}^m | Ax = b, x \geq 0\}$ ja $\{p \in \mathbb{R}^n | p^T A \geq 0, p^T b < 0\}$? Ratkaise (a)-kohdan tehtävän käypyys käyttäen Farkasin lemmaa (*Vihje*: piste $p = (3, -4, -5)$ on mielenkiintoinen). (2 p)

Vastaus

(a)

(b) Farkasin lemman mukaan tasan yksi mainituista joukoista on tyhjä. Näin ollen Farkasin lemman perusteella tehtävä on epäkäypä jos epäyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} p_1 + 2p_2 - p_3 &\geq 0 \\ 2p_1 - p_2 + 2p_3 &\geq 0 \\ p_1 &\geq 0 \\ 3p_1 + 3p_2 + 2p_3 &< 0 \end{aligned}$$

on käypä. Sijoittamalla tähän $p = (3, -4, -5)$ huomataan että kaikki epäyhtälöt toteutuvat, joten epäyhtälöryhmä on käypä, jolloin (a)-kohdan tehtävä on epäkäypä.

Tehtävä 4

Gomoryn leikkavan tason menetelmässä saadaan leikkauksia aikaan kaavalla

$$x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor \ ,$$

missä $\bar{a}_{ij} = (B^{-1}A_j)_i$, $\bar{a}_{i0} = (B^{-1}b)_i$, i jonkin kantamuuttujan indeksi, N ei-kantamuuttujien indeksit ja B optimin kantamatriisi standardimuotoiselle tehtävälle $\min c^T x$ s.e. $Ax = b, x \geq 0$.

(a) Mitkä kaksi ehtoa on leikkaavan tason toteutettava? (0.5 p)

(b) Osoita että kyseessä todellakin on leikkaava taso, kun $\bar{a}_{i0}$ on murtoluku. (4 p)

(c) Miten optimaalista taulukkoa voidaan hyödyntää duaalisimplexin alustamisessa kun leikkauksia lisätään? (1.5 p)

Vastaus

(a) Taso on leikkaava jos (i) kaikki tehtävän kokonaislukupisteet toteuttavat rajoitteen, mutta (ii) nykyinen optimipiste ei toteuta sitä.

(b) Todistetaan (i): Olkoon x mikä hyvänsä pätee

$$x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \ ,$$

sillä $x_j \geq 0 \forall j$, jolloin kertoimien pyöristäminen alaspäin pienentää vasenta puolta ja epäyhtälö pätee triviaalisti. Oikea puoli puolestaan on kantamuuttujaa i vastaava rivi Simplex-taulukosta, eli sen toteuttavat kaikki käyvät pisteet jopa ilman koknaislukurajoitusta, joten sen toteuttavat myös käyvän alueen kokonaislukuarvoiset pisteet.

Todistetaan (ii): Nykyisessä optimissa ei-kantamuuttujat $j \in N$ ovat nollia, jolloin määritelmän mukaan $x_i = (B^{-1}b)_i = \bar{a}_{i0}$, jolloin saadaan

$$x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}$$

Koska nyt vaaditaan optimiratkaisulta että $x_i \leq \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor < \bar{a}_{i0}$ (sillä $\bar{a}_{i0}$ on murtoluku) ei nykyinen ratkaisu voi toteuttaa tätä ehtoa, jolloin taso on leikkaava. $\square$

(c) Leikkaus vastaa uuden epäyhtälön lisäämistä tehtävään (ks. herkkyysanalyysiluennonlta kohta uuden epäyhtälön lisääminen). Tällöin optimaaliseen Simplex-taulukkoon täytyy lisätä uusi slackmuuttuja, jotta tehtävä saadaan standardimuotoon, ja uusi rivi leikkausta varten. Uusi taulukko ei ole primaalilkäypä, mutta on duaalikäypä jos slackmuuttuja otetaan kantaan, sillä tällöin sen redusoitu kustannus on 0. Näin ollen uusi taulukko soveltuu duaalisimplexin aloittamiseen.