

## MS-C1340 Lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt

### 1. välikoe 18.11.2013

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

1. Määrittele seuraavat käsitteet.

- (a) Lineaarikuvaus
- (b) Normi
- (c) Ortonormaali kanta

2. Osoita, että

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$$

on avaruuden  $\mathbb{P}_2$  (=enintään astetta 2 olevien reaalipolynomien joukko) ortonormaali kanta, kun sisätulon avaruuteen  $\mathbb{P}_2$  määrittelee kaava

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

3. Lineaarikuvauksesta  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiedetään, että

$$A(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$$

$$A(0, 1, 0) = (4, 2, 1)$$

$$A(0, 0, 1) = (8, 4, 1).$$

Etsi kannat  $A$ :n kuva-avaruudelle ja nolla-avaruudelle. Ovatko  $A$ :n matriisiesityksen sarakkeet lineaarisesti riippumattomat?

4. Olkoon reaalikertoiminen vektoriavaruus  $V$ , joka on varustettu sisätulolla  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Joukon  $S \subset V$  ortogonaalikomplementti määritellään

$$S^\perp = \{w \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ kaikilla } v \in S\}.$$

- (a) Osoita, että  $S^\perp$  on  $V$ :n vektoriavaruus.
- (b) Oletetaan, että  $\dim(V) < \infty$ . Osoita, että  $(S^\perp)^\perp = \text{sp}(S)$ , missä  $\text{sp}(S)$  on kaikkien  $S$ :n alkiosta muodostettujen lineaarikombinaatioiden joukko.