

Mat-1.1132/1332 Matematiikan peruskurssi C3-II/KP3-II

Tentti, 10.9.2013

Eloranta/Ranni

Merkitse paperiin: C3-II/KP3-II sen mukaan, kummasta haluat merkinnän, tentti, päivämäärä, koulutusohjelma, opiskelijanumero, allekirjoitus ja nimenselvennys.

Tehtävä 1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- Laske ominaisarvot ja -vektorit ja diagonalisoi matriisi. Onko A ortogonaalisesti diagonalisoituva?
- Olkoon $Q(x) = x^T Ax$. Määrä neliömuodon tyyppi. Jos on olemassa $x \neq 0$ siten, että $Q(x) < 0$, niin anna yksi sellainen vektori.

Tehtävä 2. Olkoon t reaalinen ja

$$B = \begin{pmatrix} 9 & t & -1 \\ t & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

- Anna Gerschgorinin ympyrät ominaisarvoille.
- Kuinka suuri saa $|t|$ Gerschgorinin lauseen nojalla olla, jotta B vielä kääntyy?

Tehtävä 3a. Laske e^{tC} kun

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

- Mille a ja b arvoille $x' = Cx$ ratkaisu on stabiili? Asymptoottisesti stabiili?

Tehtävä 4. Määrä systeemin

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - y_2^2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

kriittiset pisteet. Linearisoi niissä ja anna lineaarisen systeemin dynamiikan tyyppi.

Tehtävä 5. Laske

- $\mathcal{L}(t \sin 3t)$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4e^{-4s}}{s(s+2)}\right)$.

Käännä

Mahdollisesti hyödyllisiä kaavoja:

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a)$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f(t - a)1_a(t)) = e^{-as} F(s)$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(s)G(s)$$