Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Eirola / Päkkilä

MS-C1340 Lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt

2. välikoe 12.12.2013

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Olkoon

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$x = e^{tA} x(0)$

Etsi matriisille $\boldsymbol{A}$ spektraaliabskissa α ja logaritminen normi μ ja arvioi näiden avulla lauseketta $\|e^{t\boldsymbol{A}}\|$ alhaalta ja ylhäältä.

3. (a) Muotoile Picard-Lindelöf -lause. Todistusta ei tarvita.
   (b) Tarkastellaan alkuarvo-ongelmaa

$$x'(t) = 2x(t) - 3x(t)^2, \quad x(0) = 1.$$

Laske kaksi askelta Picard-Lindelöf -iteraatiota alkuarvosta $x^0(t) = 1$.

4. Osoita, että origo on systeemin

$$\begin{cases} x_1' = -x_1^3 - 2x_1 x_2^2 \\ x_2' = x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

asymptoottisesti stabiili tasapainotila näyttämällä, että

$$V(x) = a\,x_1^2 + b\,x_1^2 x_2^2 + c\,x_2^4$$

on tarkka Ljapunovin funktio, kun a, b ja c valitaan sopivasti.

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* ka
numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* ka
numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Eirola / Päkkilä

MS-C1340 Lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt

2. välikoe 12.12.2013

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

2. Olkoon

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} .$$

$x = e^{tA} x(0)$

Etsi matriisille $\boldsymbol{A}$ spektraaliabskissa α ja logaritminen normi μ ja arvioi näiden avulla lauseketta $\|e^{t\boldsymbol{A}}\|$ alhaalta ja ylhäältä.

3. (a) Muotoile Picard-Lindelöf -lause. Todistusta ei tarvita.
(b) Tarkastellaan alkuarvo-ongelmaa

$$x'(t) = 2x(t) - 3x(t)^2 , \quad x(0) = 1 .$$

Laske kaksi askelta Picard-Lindelöf -iteraatiota alkuarvosta $x^0(t) = 1$.

4. Osoita, että origo on systeemin

$$\begin{cases} x_1' = -x_1^3 - 2x_1\, x_2^2 \\ x_2' = x_1^2\, x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

asymptoottisesti stabiili tasapainotila näyttämällä, että

$$V(x) = a\, x_1^2 + b\, x_1^2\, x_2^2 + c\, x_2^4$$

on tarkka Ljapunovin funktio, kun a, b ja c valitaan sopivasti.