Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Eirola / Päkkilä

MS-C1340 Lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt

Tentti ja välikoeuusinnat 8.1.2014

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot.

1. välikoe: tehtävät 1-4
2. välikoe: tehtävät 5-8
Tentti: tehtävät 1,3,4,6,7 ja 8

Vastauspaperissa on selkeästi ilmoitettava, teetkö 1. välikokeen, 2. välikokeen vai tentin.

1. Olkoon $\boldsymbol{A}$ reaalinen 2×2-matriisi.

   (a) Osoita, että joukot
   $$S_1 = \{\boldsymbol{B} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}\}$$
   ja
   $$S_2 = \{\boldsymbol{B} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \boldsymbol{BA} = 0\}$$
   ovat reaalisten 2×2-matriisien muodostaman vektoriavaruuden $M_2(\mathbb{R})$ vektorialiavaruuksia.

   (b) Määrää (a)-kohdan vektorialiavaruuksien S_1 ja S_2 dimensiot, kun
   $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Olkoot
   $$\boldsymbol{v}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{v}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   Näytä, että joukko $V = \{\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3\}$ on ortogonaalinen. Skaalaa ja täydennä se $\mathbb{R}^4$:n ortonormaaliksi kannaksi.

3. Konstruoi ortonormaali kanta välillä $[-1, 1]$ jatkuvien funktioiden muodostaman vektoriavaruuden $C[-1, 1]$ aliavaruudelle $\mathrm{sp}(\{1, x^2, x^4\})$, kun sisätulo on määritelty kaavalla
   $$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

4. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ voidaan määritellä normit

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \text{ja} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|,$$

missä $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Todista seuraavat epäyhtälöt mielivaltaisille $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, kun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on tavallinen pistetulo.

(a) $\|\boldsymbol{v}\|_\infty \le \|\boldsymbol{v}\|_2 \le \|\boldsymbol{v}\|_1$

(b) $\|\boldsymbol{v}\|_1 \le \sqrt{n}\|\boldsymbol{v}\|_2 \le n\|\boldsymbol{v}\|_\infty$

(c) $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \le \|\boldsymbol{u}\|_\infty \|\boldsymbol{v}\|_1$

Vihje: Joissain kohdissa voi olla hyödyllistä tutkia normien neliöitä. Lisäksi tuloksesta $2|ab| \le a^2 + b^2$ voi olla apua.

5. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'''(t) + 5y''(t) + 7y'(t) + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0$$

muodostamalla ensimmäisen kertaluvun systeemi $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ tai käyttämällä sopivaa yritettä.

6. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kaavoista

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))
\end{aligned}$$

voi olla apua.

7. Olkoon

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Etsi mahdollisimman pieni μ siten, että tehtävän $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ ratkaisulle pätee $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le e^{\mu t}\|\boldsymbol{x}(0)\|$ kaikilla $t \ge 0$.

8. Osoita, että origo on systeemin

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2(x_3 - 1) \\ x_2' = -x_1(x_3 - 2) \\ x_3' = -2x_1x_2 - x_3^3 \end{cases}$$

stabiili tasapainotila näyttämällä, että $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$ on Ljapunovin funktio, kun a, b ja c valitaan sopivasti. Onko löytämäsi Ljapunovin funktio tarkka?