Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Tentti 18.12.2013.

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä erillisiä taulukoita.

Valitse viisi (5) tehtävää!

1. a) Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 4 \\ 10 & 13 & 15 \end{bmatrix}.$$

LU-hajotelman matriisit L ja U.
b) Ratkaise hajotelman avulla yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = [15, 15, 15]^T$.

2. Määritä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu (eli PNS-ratkaisu).

3. Määritä differentiaaliyhtälöryhmään

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

liittyvän alkuarvotehtävän $y_1(0) = 5,\ y_2(0) = -5$ ratkaisu.

4. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - 6 \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2 + 2 \end{cases}$$

kriittinen piste (= tasapainotila) ja sen tyyppi ja stabiilisuus.
Huom: Yhtälöä ei tarvitse ratkaista, vaikka sekin on eräs hyväksyttävä tapa.

5. Muodosta seuraavien lausekkeiden Laplace-käänteismuunnokset:

$$\text{a)}\ \frac{1}{s^2 + 8s + 20}, \quad \text{b)}\ \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 8s + 20}.$$

Vihje: Neliööntäydennys nimittäjässä.

6. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$y'' + 5y' - 6y = 0, \quad \text{kun}\ \ y(0) = 7,\ y'(0) = 0.$$

Kääntöpuolella Laplace-muunnokseen liittyviä kaavoja.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, muunnos

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt.$$

Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio.

Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau = (g * f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$