Aalto-yliopisto

MS-A0002 / Kevät 2014

Välikoe 2, 18.2.2014 klo 9-12

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
No calculators or tables allowed.

Tehtävä 1: a) Oletetaan, että $n \times n$-matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ kaikilla $j \neq i$, ja samat ominaisvektorit. Miksi nyt välttämättä pätee $A = B$? (3 p.)

b) Osoita, että diagonalisoituvalle matriisille A pätee $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, missä $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ ovat matriisin A ominaisarvot. (3 p.)

a) Assume that the $n \times n$-matrices A and B have the same eigenvalues $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ for all $j \neq i$, and the same eigenvectors. Why does this mean that $A = B$? (3 p.)

b) Show that for a diagonalizable matrix A it holds that $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, where $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ are the eigenvalues of the matrix A. (3 p.)

Tehtävä 2: Eräänä toukokuisena iltana kaupunkipyöristä 20% on kaupungin keskusta-alueella. Jokaisen päivän aikana 30% keskustan ulkopuolella olleista pyöristä palautuu keskustaan ja keskustassa olleista 40% päätyy keskustan ulkopuolelle. Kirjoita tilanteesta Markovin matriisi ja selvitä sen ominaisarvojen ja -vektorien avulla, kuinka suuri osuus kaupunkipyöristä on lopulta keskustassa, jos kesä jatkuu ikuisuuksiin. (6 p.)

One May evening 20% of the city bikes are in the city center. During each day, 30% of the bikes that where outside the center are returned to the center, and 40 % of the bikes that were in the center end up outside of it. Write the Markov matrix of the process, and with the help of its eigenvalues and eigenvectors, determine what percentage of the bikes end up being in the center, if the summer continues forever. (6 p.)

Tehtävä 3: a) Mistä osista singulaariarvohajotelma koostuu? (2 p.)

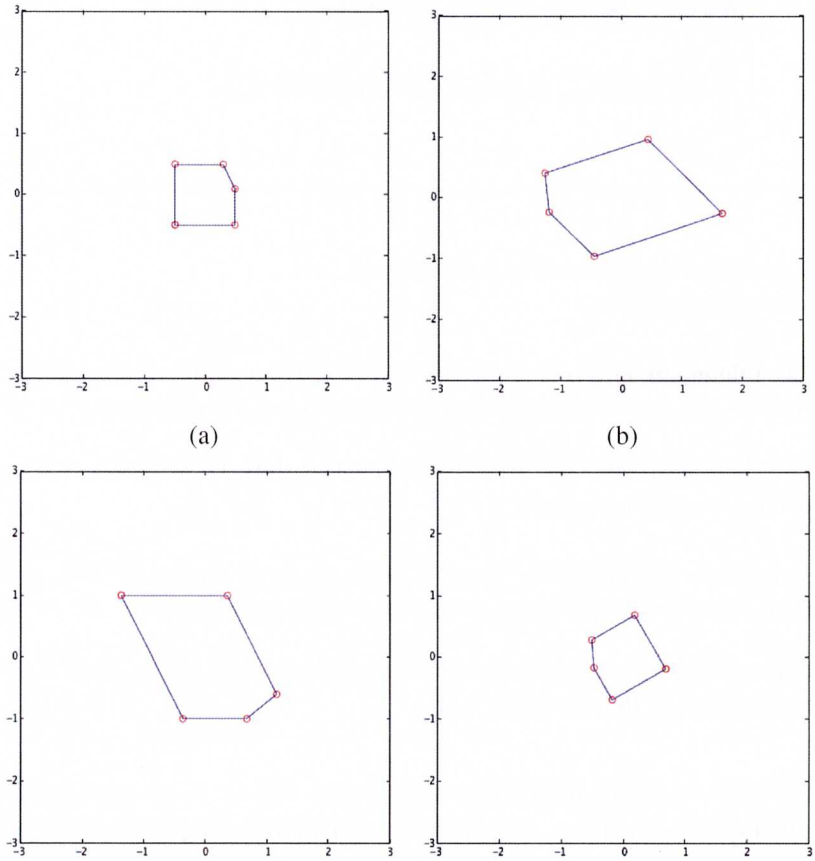
b) Tarkastellaan matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelmaa. Kääntöpuolella olevassa kuvassa on esitettynä jono pistejoukon

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

kuvia, kun pistejoukkoa kuvataan vaiheittan A:n singulaariarvohajotelman osien avulla. Mikä on kuvien luonnollinen järjestys? Perustele vastauksesi huolellisesti. (4 p.)



a) What are the parts of the singular value decomposition? (2 p.)

b) Consider the singular value decomposition of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

In the picture above is presented a sequence of pictures of the set of points

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

when it is mapped step by step with the help of the singular value decomposition of A. What is the natural order of the pictures? Explain carefully. (4 p.)