

Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II (5op)

Tentti 26.2.2014

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää laskinta. Koeaika on neljä tuntia.

1. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 2 \\ 14 & -8 & 4 \\ 10 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Laske matriisin ominaisarvot ja -vektorit. (4p)
b) Kuvaile geometrisesti lineaarikuvauksen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ käyttäytymistä. (2p)

2. Määritä yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöparille $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}. \quad (6p)$$

3. a) Osoita: jos $A \in M^{n \times n}$ on symmetrinen, niin e^A on symmetrinen. (2p)

b) Laske e^A , kun $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. (4p)

4. Tarkastellaan epälineaarista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t)^2 \\ y_2'(t) = -y_2(t). \end{cases}$$

Määritä ryhmän tasapainotilat ja kriittisten pisteiden tyypit. (6p)

5. Kaupustelija kulkee kaupunkien A , B ja C välillä Markovin matriisin

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

mukaisesti.

- a) Piirrä matriisia vastaava tilaverkko. (2p)
b) Miten usein (keskimäärin) kaupustelija vieraillee kussakin kaupungissa? (2p)
c) Miksi b-kohdan kysymys on hyvin määritelty? (2p)