



Aalto-yliopisto

Kompleksianalyysi / Kevät 2014

Välikoe 2, ma 18.2.2014 klo 17–20

Kokeessa saa käyttää laskinta. Laskujen välivaiheet on kirjoitettava käsin näkyviin. Taulukkokirjoja ei sallita.

Tehtävä 1: Näytä, että

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)} = 0,$$

jokaisella suljetulla ja yksinkertaisella polulla C , joka sulkee sisälleen pisteet z_1 ja z_2 .

Tehtävä 2: Laske residymenetelmää käyttäen (reaalinen) integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

Tehtävä 3: Ratkaise \mathcal{Z} -muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) - \frac{1}{4}y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Tehtävä 4:

- Etsi konformikuvaus, joka vie pisteet $0, 2i, -2i$ pisteiksi $-1, 0, \infty$.
- Etsi kaikki pisteet, joissa $f(z) = z^4 + z^{-4}$, ei ole konforminen.

 \mathcal{Z} -muunnokseen liittyviä kaavoja

Jos $A(z) = \mathcal{Z}(a_n)$, niin

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(na_n) &= -zA'(z), \quad \mathcal{Z}(c^n a_n) = A(z/c), \\ \mathcal{Z}(a_{n+1}) &= z(A(z) - a_0), \quad \mathcal{Z}(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z). \end{aligned}$$

Muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = \mathcal{Z}(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z \sin \alpha / (z^2 - 2z \cos \alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z - \cos \alpha) / (z^2 - 2z \cos \alpha + 1)$