

4. (a) Määrittele käsitteet rekursiivinen ja rekursiivisesti numeroituva kieli. Onko kieli

$$L_{\text{perfect cube}} = \{x \in \{0, 1, \dots, 9\}^* \mid x = y^3 \text{ jollekin positiiviselle kokonaisluvulle } y\}$$

rekursiivinen? Perustele vastauksesi lyhyesti. (Esim. 1331 kuuluu kieleen koska $1331 = 11^3$ mutta 1400 ei kuulu kieleen.) 5p.

(b) Olkoot L_1 ja L_2 aakkoston Σ kieliä. Osoita seuraava väittämä joko todeksi tai epätodeksi: jos L_1 on rekursiivisesti numeroituva kieli ja L_2 on säännöllinen kieli, niin silloin $L = L_1 \cap L_2$ on yhteydetön kieli. 5p.

(c) Osoita, että seuraava ongelma on ratkeamaton: annettuna mielivaltainen Turingin kone, hyväksyykö se merkkijonon 1010? Toisin sanoen osoita, että kieli $L_{1010} = \{c \in \{0, 1\}^* \mid \{1010\} \subseteq L(M_c)\}$ ei ole rekursiivinen, missä M_c tarkoittaa merkkijonon c kuvaamaa Turingin konetta. Jos käytät Ricen lausetta, anna myös sen määritelmä. 5p.

Total 60p.