Aalto-yliopisto Hyvönen/Kinnunen
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

4. välikoe 30.5.2013 klo 14:00-16:00.

1. Muodosta reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x, & x \in (0,1), \\ -u'(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

variaatioformulaatio. Mikä on tässä tapauksessa testifunktioavaruus V?

Hae variaatioformulaation avulla tehtävän (1) ratkaisulle Galerkin-approksimaatio aliavaruudesta

$$V_h = \operatorname{span}\{1, x\} \subset V.$$

(Riittää, että muodostat Galerkin-approksimaatiota vastaavan matriisiyhtälön, mutta sinun ei tarvitse ratkaista sitä.)

2. Kun lämpöyhtälön alku- ja reuna-arvo-ongelma

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

paikkadiskretoidaan päädytään tavallisen differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelmaan

$$(u^h)'(t) = \Delta^h_{D-D}\, u^h(t), \qquad u^h(0) = f^h, \tag{2}$$

kaikilla $t \geq 0$. Tässä $f^h = [f(x_1), \ldots, f(x_m)]^{\mathrm{T}}$ ja $u^h(t) \approx [u(x_1,t), \ldots, u(x_m,t)]^{\mathrm{T}}$, missä $x_j = jh$ ja $h = 1/(m+1)$ on hilavakio.

(a) Millainen on differenssimatriisi $\Delta^h_{D-D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$? (Riittää, että muistat rakenteen — todistaa ei tarvitse, mutta toki saa.)

(b) Esitä jokin (järjellinen) numeerinen menetelmä paikkadiskretoidun ongelman (2) ratkaisemiseksi. Valitse aika-askeleeksi $\delta > 0$ ja merkitse vektorilla u^h_k aikahila-arvon $u^h(k\delta)$ approksimaatiota, missä $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) Millä aika-askeleen $\delta > 0$ arvoilla menetelmäsi on (varmasti) stabiili, eli pätee

$$\lim_{k\to\infty} u^h_k = 0 \in \mathbb{R}^m \; ?$$

Perustele vastauksesi.

Vihje 1: Matriisin $\Delta^h_{D-D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ominaisarvot toteuttavat ehdon $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{m-1} > \lambda_m > -4/h^2$.

Vihje 2: Mille tahansa matriisille $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ pätee

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0 \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

jos ja vain jos B:n ominaisarvot $\mu_1, \ldots, \mu_m$ toteuttavat $|\mu_j| < 1$, $j = 1, \ldots, m$.

3. Kun aaltoyhtälön Dirichletin alku- ja reuna-arvo-ongelma

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

paikkadiskretoidaan, päädytään tavalliseen toisen asteen alkuarvo-ongelmaan

$$(u^h)''(t) = \Delta^h_{D-D}\, u^h(t), \qquad u^h(0) = f^h, \quad (u^h)'(0) = g^h, \tag{3}$$

kaikilla $t \geq 0$. Tässä $f^h = [f(x_1), \ldots, f(x_m)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $g^h = [g(x_1), \ldots, g(x_m)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ ja $u^h(t) \approx [u(x_1,t), \ldots, u(x_m,t)]^{\mathrm{T}}$, missä $x_j = jh$ ja $h = 1/(m+1)$ on hilavakio.

Johda tehtävälle (3) numeerinen ratkaisumenetelmä:

(a) Palauta paikkadiskretoitu ongelma (3) ensimmäisen kertaluvun systeemiksi

$$(w^h)'(t) = M^h w^h(t), \tag{4}$$

missä $M^h \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ ja $w^h : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{2m}$. Minkä alkuehdon w^h toteuttaa?

(b) Sovella tehtävään (4) implisiittistä Eulerin menetelmää, joka tuottaa jonon $w^h_k \in \mathbb{R}^{2m}$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, missä $w^h_k \approx w^h(k\delta)$ ja $\delta > 0$ on aika-askel.

(c) Todista, että

$$\lim_{k\to\infty} w^h_k = 0 \in \mathbb{R}^{2m}$$

kaikilla aika-askelpistuuksilla $\delta > 0$. Onko tämä toivottu ominaisuus fysikaalisesta näkökulmasta?

Vihje 1: Voit olettaa tunnetuksi, että matriisin $M^h \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ kaikki ominaisarvot ovat imaginäärisiä (eli kompleksilukuja, joiden reaaliosa on nolla).

Vihje 2: Tehtävän 2 vihje 2.