Aalto-yliopisto
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Hyvönen/Kinnunen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

Loppukoe 30.5.2013

1. (a) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-jaksollinen ja $f(t) = t$, kun $-\pi < t \leq \pi$. Määritä funktion f kompleksinen Fourierin sarja.

   (b) Selosta lyhyesti, miten Fourierin sarja liittyy tason yksikkökiekon Dirichletin ongelman

   $$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{kun} \quad x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1, \\ u(x) = g(x), & \text{kun} \quad x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = 1, \end{cases}$$

   ratkaisemiseen.

2. (a) Miten määritellään Fourierin muunnos ja Fourierin käänteismuunnos?

   (b) Oletetaan, että f, g, $\widehat{f}$, $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Näytä, että

   $$\widehat{fg}(\xi) = (2\pi)^{-n}(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$$

   kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$.

3. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko.

   (a) Muotoile ja todista maksimiperiaate harmoniselle funktiolle $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ joukossa Ω.

   (b) Oletetaan lisäksi, että $g \in C(\partial\Omega)$ ja $f \in C(\Omega)$. Todista maksimiperiaatteen avulla, että Dirichletin ongelmalla

   $$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \text{kun} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & \text{kun} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

   on korkeintaan yksi ratkaisu $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

4. Muodosta reuna-arvo-ongelmalle

   $$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x, & x \in (0,1), \\ -u'(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0, & \end{cases} \tag{1}$$

   variaatioformulaatio. Mikä on tässä tapauksessa testifunktioavaruus V?

   Hae variaatioformulaation avulla tehtävän (1) ratkaisulle Galerkin-approksimaatio aliavaruudesta

   $$V_h = \operatorname{span}\{1, x\} \subset V.$$

   (Riittää, että muodostat Galerkin-approksimaatiota vastaavan matriisiyhtälön, mutta sinun ei tarvitse ratkaista sitä.)