5. Kun lämpöyhtälön alku- ja reuna-arvo-ongelma

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

paikkadiskretoidaan päädytään tavallisen differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelmaan

$$(u^h)'(t) = \Delta^h_{D-D}\, u^h(t), \qquad u^h(0) = f^h, \tag{2}$$

kaikilla $t \geq 0$. Tässä $f^h = [f(x_1), \ldots, f(x_m)]^{\mathrm{T}}$ ja $u^h(t) \approx [u(x_1,t), \ldots, u(x_m,t)]^{\mathrm{T}}$, missä $x_j = jh$ ja $h = 1/(m+1)$ on hilavakio.

(a) Millainen on differenssimatriisi $\Delta^h_{D-D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$? (Riittää, että muistat rakenteen — todistaa ei tarvitse, mutta toki saa.)

(b) Esitä jokin (järjellinen) numeerinen menetelmä paikkadiskretoidun ongelman (2) ratkaisemiseksi. Valitse aika-askeleeksi $\delta > 0$ ja merkitse vektorilla u^h_k aikahila-arvon $u^h(k\delta)$ approksimaatiota, missä $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) Millä aika-askeleen $\delta > 0$ arvoilla menetelmäsi on (varmasti) stabiili, eli pätee

$$\lim_{k \to \infty} u^h_k = 0 \in \mathbb{R}^m \ ?$$

Perustele vastauksesi.

Vihje 1: Matriisin $\Delta^h_{D-D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ominaisarvot toteuttavat ehdon $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{m-1} > \lambda_m > -4/h^2$.

Vihje 2: Mille tahansa matriisille $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pätee

$$\lim_{k \to \infty} B^k = 0 \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

jos ja vain jos B:n ominaisarvot $\mu_1, \ldots, \mu_m$ toteuttavat $|\mu_j| < 1$, $j = 1, \ldots, m$.

6. Määritellään yleiselle alkuarvo-ongelmalle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \neq 0, \tag{3}$$

numeerinen ratkaisumenetelmä

$$x_{j+1} = x_j + h\Big(\frac{1}{4} f(t_j, x_j) + \frac{3}{4} f\big(t_j + \frac{2}{3}h, x_j + \frac{2}{3}h f(t_j, x_j)\big)\Big), \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

missä $t_j = jh$ ja $h > 0$.

Olkoon $f(t,x) = \lambda x$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Kirjoita iteraatti x_j alkuarvon x_0 avulla mielivastaiselle $j = 1, 2, \ldots$.

(b) Todista, että

$$x(h) = x_1 + O(h^3),$$

missä $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tehtävän (3) tarkka ratkaisu edellä annetulle f. Mikä vaikuttaisi tämän perusteella olevan tarkasteltavan menetelmän kertaluku?

(c) Olkoon $\lambda < 0$ on kiinnitetty. Millä hilavakion $h > 0$ arvoilla pätee

$$\lim_{j \to \infty} x_j = \lim_{t \to \infty} x(t) \ ?$$