

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

1. välikoe 19.11.2013 klo 17–19.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Tarkastellaan yhtälön $f(x) = 0$ numeerista ratkaisemista Newtonin menetelmän avulla.

a) Selitä, miten menetelmään liittyvä palautuskaava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

saadaan funktion kuvaajalle piirretyn tangenttisuoran avulla. Piirrä kuvio.

b) Laske ensimmäinen askel x_1 yhtälölle $x^3 - 2 = 0$, kun $x_0 = 2$.

2. a) Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{8^n} x^{3n}$$

suppenee? Tutki myös mahdolliset suppenemisvälin päätepisteet.

b) Oletetaan, että sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

termeille on voimassa $\sqrt[n]{|a_n|} = |a_n|^{1/n} \leq 1/2$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Osoita, että sarja suppenee.

3. a) Laske raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.

b) Toisen asteen yhtälön $ax^2 - x + b = 0$ yksi ratkaisu on muotoa

$$f(a) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4ab}}{2a},$$

kun $a \neq 0$. Laske raja-arvo

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(a).$$

4. a) Määritä funktion $f(x) = x^4$ Taylor-polynomi $P_2(x; x_0)$ pisteen $x_0 = 1$ suhteen.

b) Millainen approksimaatio saadaan lausekkeelle

$$\frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0,$$

kun $\sin x$ korvataan sen Maclaurin-polynomilla $P_3(x) = P_3(x; 0)$?

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$