

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

1. välikoe 30.1.2014 klo 17–19.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. a) Osoita, että kaava

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

määrittelee sisätulon tasossa \mathbf{R}^2 . (Vihje: Ehtoja on 5 kpl)

- b) Muodosta a-kohdan sisätulon määräämän tason normin $\|(x_1, x_2)\|$ ja metriikan $d((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ lausekkeet sekä hahmottele yksikköpallon $S((0, 0), 1)$ kuva.
2. Olkoot d_1 ja d_2 metriikkoja joukossa X . Osoita, että $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$, $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$, kun $x, y \in X$, on metriikka joukossa X . (Vihje: Ehtoja on 3 kpl)
3. a) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Esitä joukkojen ∂A ja \bar{A} määritelmät.
b) Perustele tarkasti: Normiavarauuden määräämän metriikan tapauksessa $S(x, r) = \partial B(x, r)$ aina, kun $x \in X$ ja $r > 0$. (Luennolla/harjoituksissa todistettuja kuulien $B(x, r)$ ominaisuuksia saa käyttää.)
4. Olkoon $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva ja $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x, y) = y - f(x)$.
a) Osoita, että g on jatkuva.
b) Esitä joukko

$$U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > f(x)\}$$

muodossa $U = g^{-1}V$ ja päätele, että U on avoin. (Luentojen yleisiä tuloksia saa käyttää.)