

1. Olkoon  $\{X_t|t \geq 0\}$  aikahomogeeninen jatkuva-aikainen Markovin ketju, jolla on numeroituva tilajoukko  $S$ . Olkoon  $T_i$  aika, joka vietetään yksittäisellä vierailulla tilassa  $i$ ,  $i \in S$ . Osoita, että  $T_i$  on eksponenttijakautunut.
2. Vastaa molempiin seuraavista kysymyksistä:
  - (a) Olkoon  $\{N(t)\}$  Poisson-prosessi, jossa  $N(t)$  on kahvilaan  $K$  saapuneiden asiakkaiden lukumäärä ajanhetkellä  $t$ . Oletetaan, että prosessin intensiteetti  $\lambda = 0.1$  ja käytetty aikayksikkö on yksi minuutti. Oletetaan, että 60 prosenttia asiakkaista on miehiä ja 40 prosenttia naisia, ja oletetaan että jokaisen asiakkaan sukupuoli on riippumaton muiden asiakkaiden sukupuolesta. Olkoon  $N_m(t)$  ajanhetken  $t$  mennessä saapuneiden miesten lukumäärä ja  $N_n(t)$  ajanhetken  $t$  mennessä saapuneiden naisten lukumäärä. Millaisia prosesseja ovat  $\{N_m(t)\}$  ja  $\{N_n(t)\}$ ? Kuinka monta naista kahvilaan  $K$  saapuu odotusarvoisesti yhden tunnin sisällä?
  - (b) Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksella järjestetään 400 metrin pussijuoksukilpailu. Osanottajia on 5 kappaletta. Edellisvuotisten kilpailujen nojalla voidaan sanoa, että kilpailijoiden maaliintuloajat (minuutteina)  $X_1, \dots, X_5$ , ovat toisistaan riippumattomia, ja että  $X_i \sim \exp(\frac{1}{\sqrt{i}})$ . Apulaisprofessori Ilmonenkin osallistuu kilpailuun, ja hänen maaliintuloaikansa on  $X_4 \sim \exp(\frac{1}{\sqrt{4}})$ . Millä todennäköisyydellä Apulaisprofessori Ilmonen voittaa kilpailun?
3. Uusi influenssavirus on iskenyt Aalto-yliopiston henkilökuntaan ja opiskelijoihin. Laboratoriossa  $L$  otetaan verikokeita, joilla tutkitaan tartunnansaaneiden tilaa. Kuvatkoon  $X_t$  laboratoriossa  $L$  ajanhetkellä  $t$  olevien asiakkaiden lukumäärää. Laboratorioon tulee asiakkaita toisistaan riippumatta odotusarvoisesti 5 min välein (=12 tunnissa). Oletetaan, että asiakkaiden väliset saapumisajat ovat eksponenttijakautuneet. Laboratoriossa on kaksi työntekijää palvelemassa asiakkaita, ja yhden asiakkaan palvelu kestää odotusarvoisesti 15 min. Oletetaan, että palveluaika on eksponenttijakautunut. Uusi asiakas ei tule sisään, jos laboratoriossa on jo 3 asiakasta. Mikä on prosessin  $\{X_t\}$  tilajoukko? Määritä prosessin generoiva matriisi  $G$  ja prosessin stationaarinen jakauma  $\pi$ .