3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa potentiaali on siis $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right), \tag{3}$$

missä $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

a) Käyttäen $\hat{x}$:n ja $\hat{p}$:n peruskommutaatiorelaatiota johda kommutaatiorelaatio $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Osoita, että Hamiltonin operaattori on $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$. (3 p.)

b) Laske ominaistiloille $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ ja $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$ sekä muodosta epämääräisyyksien tulo $\Delta x \Delta p$. Missä ominaistilassa saavutetaan alin arvo tulolle $\Delta x \Delta p$? Toteutuuko Heisenbergin epämääräisyysperiaate? (Jos oskillaattorin ominaistila on $|n\rangle$) missä $n = 0, 1, 2\ldots$, voit olettaa tunnetuksi $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ja $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ (3 p.)

4. a) Johda operaattorin $\hat{A}$ odotusarvon aikakehitykselle lauseke

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle, \tag{4}$$

missä $\hat{H}$ on Hamiltonin operaattori. (3 p.)

b) Tarkastellaan pitkin x-akselia liikkuvaa m-massaista hiukkasta potentiaalissa $V(x)$. Hiukkanen on tilassa $|\psi\rangle$. Johda liikeyhtälöt hiukkasen paikalle x ja liikemäärälle p. Miten saadut tulokset liittyvät hiukkasen klassisen mekaniikan vastaaviin suureisiin (Ehrenfestin periaate)? (3 p.)

5. Meillä on kaksi tilaa $|\psi_g\rangle$ ja $|\psi_e\rangle$ joiden energiat ovat $E_g = \langle\psi_g|\hat{H}|\psi_g\rangle = 0$ ja $E_e = \langle\psi_e|\hat{H}|\psi_e\rangle$. Tilat kytketään toisiinsa niin, että $\langle\psi_e|\hat{H}|\psi_g\rangle = \hbar\Omega$ ja $\langle\psi_g|\hat{H}|\psi_e\rangle = \hbar\Omega^*$. ($\hat{H}$ on systeemin Hamiltonin operaattori.)

a) Mikä on yleisen tilan $|\psi(t)\rangle = a(t)|\psi_g\rangle + b(t)|\psi_e\rangle$ energia (2p.)

b) Kirjoita tämän kaksitilasysteemin Hamiltonin operaattori 2×2 matriisina, ratkaise sen ominaistilat ja niiden energiat. (2p.)

c) Ratkaise aaltofunktio $|\psi(t)\rangle$, kun ajan hetkellä $t = 0$ $a(t = 0) = 1$ ja $b(t = 0) = 0$. Voit tässä kohdassa olettaa yksinkertaisuuden vuoksi, että $E_e = 0$. (2p.)

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.