Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu — Alestalo/Karrila
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

2. välikoe 18.2.2014 klo 9–12.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin. **Ratkaisuissa saa käyttää kääntöpuolen tuloksia ilman käsin laskettuja välivaiheita.**

1. a) Selitä lyhyesti, kuinka kahden muuttujan funktion gradientin nollakohdan tyyppiä voidaan tutkia Taylor-polynomin $P_2(x, y)$ avulla. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että nollakohta on origossa $(0, 0)$.
   b) Millä parametrin $t \in \mathbf{R}$ arvoilla funktiolla
   $$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2t(xy + yz + xz)$$
   on paikallinen minimi kohdassa $(0, 0, 0)$? (Kts. kääntöpuoli)

2. Määritä funktion $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 + 2y^3$ suurin ja pienin arvo yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ käyttämällä Lagrangen menetelmää.

3. a) Kappaletta $K \subset \mathbf{R}^3$ rajoittavat ehdot
   $$x \geq 0, \ \ y \geq 0 \ \text{ ja } \ 0 \leq z \leq \frac{1}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$
   Laske sen tilavuus V epäoleellisena integraalina. Vihje: arctan.
   b) Voidaanko kappaleelle K määritellä keskiö? Tutki tapausta
   $$\overline{x} = \frac{1}{V} \iiint_K x \, dV.$$

4. Laske napakoordinaattien avulla määritellyn tasokäyrän $r = 2 + \cos(10\,\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, rajaaman alueen pinta-ala. (Kts. kääntöpuoli)

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \pi/3 & \pi/2 & 3\pi/4 & \pi & 5\pi/4 & 3\pi/2 & 7\pi/4 & 2\pi \\ \sin(\alpha) & 0 & \sqrt{3}/2 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ \cos(\alpha) & 1 & 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Käännä!