Cauchy-Riemannin yhtälöt:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}v(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}v(x,y).$$

Möbius-kuvaukset:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Polkuintegraali:

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.$$

Cauchyn integraalilause:

$$\oint_C f(z)\,dz=0.$$

Cauchyn integraalikaava:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i f(z_0).$$

Laurentin sarja:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

Residylause:

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=z_j}f(z).$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja: Jos $A(z)=Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n)=-zA'(z),\ Z(c^n a_n)=A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1})=z(A(z)-a_0),\ Z(a_{n+2})=z^2(A(z)-a_0-a_1/z).$$

Z-muunnoksia:

(a_n)	$A(z)=Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2-2z\cos\alpha+1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2-2z\cos\alpha+1)$

Epähomogeeninen systeemi:

$$\mathbf{x}(t)=e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{u}+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{b}(s)\,ds.$$

Matriisinormi:

$$\|\mathbf{A}\|=\max_{\|\mathbf{z}\|=1}\|\mathbf{A}\mathbf{z}\|.$$

Häiriöalttius:

$$\operatorname{cond}(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|.$$

Normaaliyhtälöt:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{z}=\mathbf{A}^*\mathbf{c},\qquad \mathbf{R}\mathbf{z}=\mathbf{Q}^*\mathbf{c}.$$

Gram-Schmidt:

$$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1 \tag{1}$$

$$\mathbf{q}_1=\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \tag{2}$$

$$\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{a}_{k+1}-\langle\mathbf{a}_{k+1},\mathbf{q}_1\rangle\mathbf{q}_1-\ldots-\langle\mathbf{a}_{k+1},\mathbf{q}_k\rangle\mathbf{q}_k \tag{3}$$

$$\mathbf{q}_{k+1}=\frac{\mathbf{v}_{k+1}}{\|\mathbf{v}_{k+1}\|} \tag{4}$$

$$\to\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\ldots,\mathbf{q}_n\}.$$

$\text{res}^2 = \frac{d}{dz}(z-z_0)^2 f(z)$

$\text{res} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0) f(z)$

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Rasila

Mat-1.1230 peruskurssi S3

2013

Tentti Ke 18.12.2013 klo 9.00-13.00

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksessa sallittua laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1 a) Etsi Möbius-kuvaus, joka vie pisteet $-1, 0, 1$ pisteiksi $0, 1, -1$.

b) Etsi Möbius-kuvaus, joka vie pisteet $0, 2i, -2i$ pisteiksi $-1, 0, \infty$.

2 Laske kompleksinen polkuintegraali

$$\int_C |z|\,dz,$$

kun C on (a) pisteitä $[-i, i]$ yhdistävä jana, ja (b) origokeskisen ympyrän kaari, jonka päätepisteet ovat $-i$ ja i, vastapäivään kierrettynä.

$z(t) = e^{it} \quad t \in [0, \pi]$

3 Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) - 6y(n+1) - 55y(n) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

4 Oletetaan, että $c > 0$ ja

$$f(t) = \begin{cases} -c, & \text{kun } -\pi \le t < 0, \\ c, & \text{kun } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Laske funktion $f(t)$ Fourier-sarja (f:n jakso on 2π).

5 Laske matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix}$$

Cholesky-hajotelma $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$.

6 Anna systeemin $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ virtaus, kun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mikä on häiritysn systeemin

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

ratkaisu alkuehdolla $\mathbf{x}(0) = (1,1)^T$?

Vihje:

Kääntöpuolella olevat kaavat voivat virkistää muistia.