Tfy-0.2124 Kvanttimekaniikka Tentti (5 op) 23.05.2013

1. Vastaa, mahdollisimman lyhyesti mutta perustellusti seuraaviin kohtiin. (1 p./kohta)
a) Mitä tarkoitetaan degeneraatiolla
b) Osoita ei-degeneroidussa tapauksessa, että jos kaksi hermiittistä operaattoria $\hat{A}$ ja $\hat{H}$ kommutoivat keskenään, niin niillä on yhteiset (ei-triviaalit) ominaisfunktiot.
c) Tunneloituminen
d) Blochin aaltofunktio
e) Sidottu tila
f) Palloharmoniset funktiot

2. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaalikuopassa, jolle $V = 0$, kun $0 \leq x \leq a$, muulloin $V = \infty$. Hiukkasen Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ ortonormeeratut ominaisfunktiot ja -arvot ovat

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \; E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2, \; n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Oletetaan, että hiukkasen tilafunktio ajanhetkellä $t = 0$ on

$$\Psi(x, 0) = C\left[\phi_1(x) + 2\phi_2(x) + 2\phi_3(x)\right], \tag{2}$$

missä $C = vakio$

a) Määritä vakio C niin, että tilafunktio on oikein normeerattu. (1 p.)

b) Ratkaise hiukkasen tilafunktio $\Psi(x, t)$ ajanhetkellä t. Onko tilafunktio edelleen normeerattu? Perustelut. (3 p.)

c) Onko energian odotusarvo $\langle \hat{H} \rangle$ liikevakio? Perustelut. (1 p.)

d) Mitä energian arvoja ja millä todennäköisyyksillä voidaan energian yksittäisestä mittauksesta saada (1 p.)

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa potentiaali on siis $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right), \tag{3}$$

missä $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

a) Käyttäen $\hat{x}$:n ja $\hat{p}$:n peruskommutaatiorelaatiota johda kommutaatiorelaatio $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Osoita, että Hamiltonin operaattori on $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$. (2 p.)

b) Oletetaan, että tarkasteltava systeemi on ajanhetkellä t ominaistilassa ϕ_n, joka voidaan luoda alimmasta ominaistilasta ϕ_0 relaatiolla

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\phi_0. \tag{4}$$

Kantafunktiot on normeerattu, eli $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{n,m}$. Osoita, että ominaistiloille on voimassa

$$\hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1} \text{ ja } \hat{a}^\dagger\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1} \tag{5}$$

(2 p.)
KÄÄNNÄ SIVUA

c) Laske ominaistiloille $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ ja $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ sekä muodosta epämääräisyyksien tulo $\Delta x \Delta p$. Missä tilassa ϕ_n saavutetaan alin arvo tulolle $\Delta x \Delta p$? Toteutuuko Heisenbergin epämääräisyysperiaate? (2 p.)

4. a) Johda fysikaalisen suureen A odotusarvon aikakehitykselle lauseke

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle, \tag{6}$$

missä $\hat{H}$ on Hamiltonin operaattori ja $\hat{A}$ fysikaalista suuretta A vastaava operaattori. (3 p.)

b) Tarkastellaan pitkin x-akselia liikkuvaa m-massaista hiukkasta potentiaalissa $V(x)$. Laske hiukkasen paikan x ja liikemäärän p odotusarvojen aikakehitys. Miten saadut tulokset liittyvät hiukkasen klassisen mekaniikan vastaaviin suureisiin (Ehrenfestin periaate)? (3 p.) ?

5. Tarkastellaan systeemin kulmaliikemäärän mittaamista. Systeemi on $\hat{L}^2$:n ja $\hat{L}_z$:n yhteisessä ominaistilassa $|lm\rangle = |10\rangle$ ominnaisarvoilla $L^2 = 2\hbar^2$ ja $L_z = 0\hbar$. Tämän jälkeen systeemistä mitataan L_y.

a) Mitkä ovat L_y:n mittauksen mahdolliset arvot? Perustelut. (2 p.)

b) Laske todennäköisyydet L_y:n eri mittaustuloksille. (4 p.)

Ohje: $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \hat{L}_y$, $\hat{L}_\pm |lm\rangle = \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}|l, m \pm 1\rangle$, $\langle lm|l'm'\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.

$$\hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}$$

$$\hat{a}\phi_n = \hat{a}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger \phi_{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger \phi_{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}\right)\phi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + n - 1\right.$$