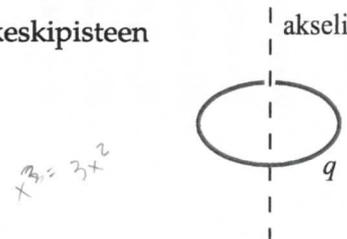


**Vastaa tehtävään 1** ja valintasi mukaan **joko tehtävään 2 tai 3**. Jokainen tehtävä on kymmenen pisteen arvoinen. (Jos vastaat sekä tehtävään 2 että 3, tehtävä 2 arvioidaan.)

Palauta vähintään yksi nimelläsi varustettu konsepti. Palauta *kaikki* saamasi yliopiston konseptiarkit – myös tyhjät ja suttupaperit. Tehtäväpaperin saat pitää.

**Sallittu oheismateriaali:** taskulaskin (myös ohjelmoitavat ja graafiset laskimet käyvät).

- Selitä Coulombin laki lyhyesti ja kattavasti *kaavoja käyttämättä*.  $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
  - Mitkä ovat sähkökentän ja potentiaalin reunaehdot ideaalijohteen reunalla? (Jos kirjoitat ehdot kaavoina, selitä kaavat.)
  - Mikä on sähkökentän suunta ympyränmuotoisen varaussilmukan keskipisteen läpi kulkevalla akselilla (koko akseli)?

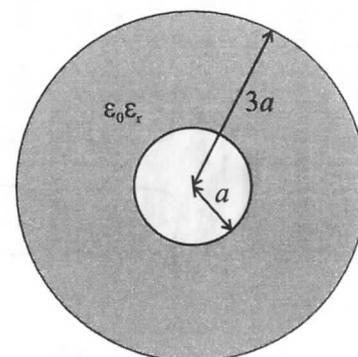


- Origossa on  $+z$ -suuntaan osoittava sähködipoli, jonka dipolimomentti on  $p = Qd$  ( $Q > 0$ ) ja potentiaali (pallokoordinaateissa) on

$$\phi_d(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Etäisyydellä  $8d$  dipolista on  $xy$ -tasolla pistevaraus  $-Q$ . Määritä varaukseen kohdistuva sähköstaattinen voimavektori (suuruus ja yksikäsitteinen suunta).

- Pallokondensaattorin täytteenä on eristettä  $\epsilon_0\epsilon_r$ . Elektrodiensa säteet ovat  $a$  ja  $3a$ . Määritä sisä- ja ulkoelektrodien välinen sähkökenttävektori  $\vec{E}(\vec{r})$  ja jännite  $U$ , jos sisäelektrodin varaus on  $Q$  ja ulkoelektrodin varaus on  $-Q$ .



## Nablaoperaatiot

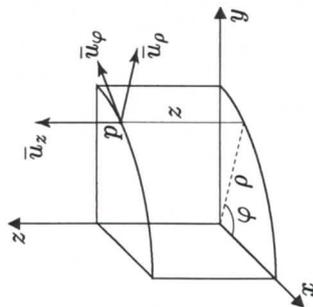
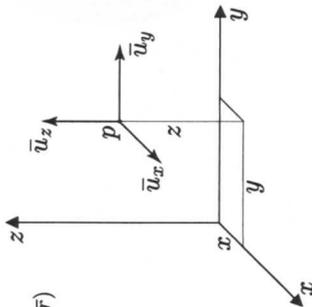
### Karteesianen koordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \bar{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\vec{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



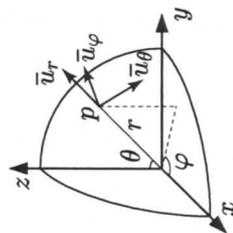
### Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \bar{u}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \bar{u}_\rho & \rho \bar{u}_\theta & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\theta & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



### Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \bar{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \bar{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \bar{u}_r & r \bar{u}_\theta & r \sin \theta \bar{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} f_\phi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

## Koordinaattimuunnokset vektorille $\vec{f}$

### Karteesianen $\leftrightarrow$ sylinterikoordinaatisto

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

### Karteesianen $\leftrightarrow$ pallokoordinaatisto

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

### Sylinteri $\leftrightarrow$ pallokoordinaatisto

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

## Vektori-integraalilaskennan kaavoja

### Karteesianen koordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_x dx + \bar{u}_y dy + \bar{u}_z dz$$

$$dS_x = \bar{u}_x dy dz$$

$$dS_y = \bar{u}_y dx dz$$

$$dS_z = \bar{u}_z dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

### Sylinterikoordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_\rho d\rho + \bar{u}_\varphi \rho d\varphi + \bar{u}_z dz$$

$$dS_\rho = \bar{u}_\rho \rho d\varphi dz$$

$$dS_\varphi = \bar{u}_\varphi \rho d\rho dz$$

$$dS_z = \bar{u}_z \rho d\rho d\varphi$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

### Pallokoordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_r dr + \bar{u}_\theta r d\theta + \bar{u}_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$dS_r = \bar{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dS_\theta = \bar{u}_\theta r \sin \theta dr d\varphi$$

$$dS_\varphi = \bar{u}_\varphi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\text{Gaussin lause} \quad \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Stokesin lause} \quad \int_S \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

### Vakioita

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{C}$$