Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Rasila

Mat-1.1230 peruskurssi S3 2013

Tentti Ma 12.8.2013 klo 16.00-20.00

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksessa sallittua laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1 a) Laske $|(1+i)(2+i)|$.

b) Osoita, että vektorit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ovat kohtisuorassa jos ja vain jos $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

2 Laske residymenetelmää käyttäen integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{15\sin^2\theta + 1}.$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-z^{-1})$ $\quad 1-z+z^{-1}$

$\frac{1}{2}(1-(z-z^{-1}))$ $\quad -z+3$

$-\frac{1}{2}(z-3)$

3 Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) - 4y(n+1) + 3y(n) = 2^{n+2}, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 3.$$

4 Muodosta π-jaksoisen funktion

$$f(t) = |\sin(t)|, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2),$$

Fourier-sarja.

5 Laske matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

LU-hajotelma.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

6 Kirjoita differentiaaliyhtälö

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$$

ryhmänä ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöitä eli muodossa $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Vihje:

Kääntöpuolella olevat kaavat voivat virkistää muistia.

Cauchy-Riemannin yhtälöt:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y).$$

Möbius-kuvaukset:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Polkuintegraali:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.$$

Cauchyn integraalilause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Cauchyn integraalikaava:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Laurentin sarja:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

Residylause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja: Jos $A(z) = Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z)-a_0),\ Z(a_{n+2}) = z^2(A(z)-a_0-a_1/z).$$

Z-muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2-2z\cos\alpha+1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2-2z\cos\alpha+1)$

Epähomogeeninen systeemi:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{u} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{b}(s)\,ds.$$

Matriisinormi:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{z}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|.$$

Häiriöalttius:

$$\operatorname{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|.$$

Normaaliyhtälöt:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}^*\mathbf{c}, \qquad \mathbf{R}\mathbf{z} = \mathbf{Q}^*\mathbf{c}.$$

Gram-Schmidt:

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 && (1)\\
\mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} && (2)\\
\mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{a}_{k+1} - \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{q}_1\rangle \mathbf{q}_1 - \ldots - \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{q}_k\rangle \mathbf{q}_k && (3)\\
\mathbf{q}_{k+1} &= \frac{\mathbf{v}_{k+1}}{\|\mathbf{v}_{k+1}\|} && (4)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}.$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$= \frac{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}{2} + \frac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}{2}$$