Kvanttimekaniikan jatkokurssi TFY-0.3211
Tentti
Tammikuun 8. 2014
Tentaattori: Jami Kinnunen, N208

Tentti

1. (6p) **Käsitteistöä**

a) Pyörimismääräoperaattorit L^2 ja L_z kommutoivat keskenään joten niille voidaan muodostaa yhteinen ominaistilakanta. Kyseessä on kuitenkin kannan valinta eikä se ole välttämätöntä. Anna siis esimerkki tilasta $|\psi\rangle$ joka on operaattorin L^2 ominaistila mutta *ei ole* operaattorin L_z ominaistila. Anna vielä esimerkki tilasta joka on operaattorin L_z ominaistila mutta *ei ole* operaattorin L^2 ominaistila.

b) Diracin (tai Fermin) meri

c) Tarkastellaan kahta kaksitilasysteemin *tiheysmatriisia* jossakin tilakannassa $|0\rangle$,$|1\rangle$

$$\rho_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Mitä tiheysmatriisit ρ_{A} ja ρ_{B} kertovat todennäköisyyksistä löytää systeemi tiloilta $|0\rangle$ ja $|1\rangle$? Voidaanko tiheysmatriiseja erottaa toisistaan?

2. (6p) **Häiriöteoria**

Tarkastellaan m-massaista hiukkasta yksiulotteisessa harmonisessa potentiaalissa $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Lisätään potentiaalin keskelle deltafunktio-potentiaalihäiriö $\hat{H}'$

$$V'(x) = \langle x|\hat{H}'|x\rangle = \alpha\delta(x),$$

missä α on jokin vakio. Häiriöttömät ominaistilat paikkaesityksessä ovat

$$\phi_n^{(0)}(x) = \langle x|n^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \tag{2}$$

ja vastaavat energiat $E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Viisi ensimmäistä Hermiten polynomia ovat $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$.

a) Muodosta yhtälö paikkaesityksessä alkuperäisen potentiaalin ominaistilojen ensimmäisen kertaluvun energiakorjauksille $E_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle$. Selitä miksi energiat eivät muutu osalle tiloista.

KÄÄNNÄ

b) Laske ensimmäisen kertaluvun tilakorjauksen

$$\phi_n^{(1)}(x) = \langle x|n^{(1)}\rangle = \langle x| \sum_{m\neq n} \frac{\langle m^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^{(0)}\rangle$$

neljä ensimmäistä termiä ($m = 1, 2, 3, 4$) perustilalle $n = 0$ paikkaesityksessä. Miksi osa termeistä on nollia?

3. (6p) **Sirontateoriaa**
Kolmessa ulottuvuudessa siroavan hiukkasen aaltofunktion yrite suuren r:n rajalla on muotoa

$$\psi(r, \theta, \phi) = A\left[e^{ikz} + f(\theta, \phi)\frac{e^{ikr}}{r}\right].$$

Perustele tämä yrite ja muotoile vastaavat yritteet yhdessä ja kahdessa ulottuvuudessa.

4. (6p) **Identtiset hiukkaset**
Tarkastellaan kahta (ei välttämättä identtistä) hiukkasta, joista kumpikin voi olla kahdessa paikka-avaruuden tilassa $|A\rangle$ ja $|B\rangle$ ($\phi_A(x) = \langle x|A\rangle$, $\phi_B(x) = \langle x|B\rangle$).
a) Identtiset hiukkaset ovat aina joko fermioneja tai bosoneita. Mitä ehtoja tästä seuraa systeemin fysikaalisesti sallituille tiloille?

Määritellään operaattori joka mittaa hiukkasten välisen etäisyyden neliön $\hat{d}^2 = (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2$, jossa operaattori $\hat{x}_i$ antaa hiukkasen i paikan. Oletetaan ensin, että hiukkaset ovat ei-identtiset ja että ne ovat tulotilalla $|A\rangle|B\rangle = |AB\rangle$. Hiukkasten välisen etäisyyden odotusarvo on nyt

$$\begin{aligned}\langle \hat{d}^2\rangle_0 &= \langle AB|\,(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2\,|AB\rangle \\ &= \int dx_1 \int dx_2\, \phi_A(x_1)^* \phi_B(x_2)^*\,(x_1 - x_2)^2\, \phi_A(x_1)\phi_B(x_2).\end{aligned}$$

b) Kuinka etäisyyden neliön odotusarvo muuttuu jos hiukkaset ovatkin identtisiä fermioneja tai bosoneja?
c) Kuinka tämä hiukkasten identtisyyden vaikutus etäisyyden odotusarvoon näkyy käytännön systeemeissä esimerkiksi Heliumin energiaspektrissä tai molekyylisidoksissa?