

Tentti (15.1.2014 klo 16–19)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Polynomista $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiedetään, että

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\text{joillakin } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja että } \begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = 0, \\ f(2) = 0, \\ f(3) = -6. \end{cases}$$

Kirjoita matriisiyhtälö, josta ratkaiset tuntemattomat kertoimet a, b, c, d Gauss-eliminaation avulla.

2. Millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvoilla matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$$

on käänteismatriisi? Määritä A^{-1} , kun $a = 1$.

3. Tarkastellaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

a) Etsi matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit.

b) Olkoon $P \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ kääntyvä

— selitä, miksi tässä $P^{-1}AP \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ei voi olla diagonaalinen.

(Vihje: jos tämä olisi diagonaalinen, niin matriisilla A olisi ominaisvektoreina...)

4. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ singulaariarvohajotelma

eli matriisit $U, \Sigma, V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, joille $A = U\Sigma V^T$,

missä U, V ortogonaalisia (unitaarisia)

ja Σ singulaariarvojen diagonaalimatriisi.