S-96.1121 Dynaaminen kenttäteoria 2013–14/III–IV

Välikoe 1, 18.2.2014

Vastaa tehtävään 1 ja valintasi mukaan **joko tehtävään 2 tai 3.** Jokainen tehtävä on kymmenen pisteen arvoinen. (Jos vastaat sekä tehtävään 2 että 3, tehtävä 2 arvioidaan.)

Palauta vähintään yksi nimelläsi varustettu konsepti. Palauta *kaikki* saamasi yliopiston konseptiarkit – myös tyhjät ja suttupaperit. Tehtäväpaperin saat pitää.

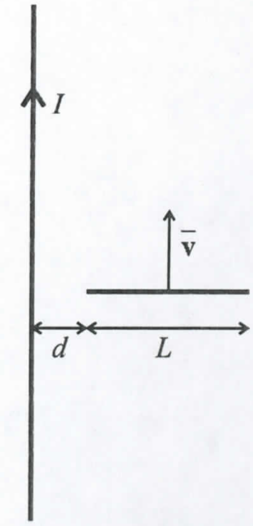
Sallittu oheismateriaali: taskulaskin (myös ohjelmoitavat ja graafiset laskimet käyvät).

1. (a) Selitä lyhyesti Lenzin laki. Miten laki liittyy Maxwellin yhtälöihin? (4 p.)

   (b) Tiedät sähkö- ja magneettikenttäosoittimet $\bar{\mathrm{E}}(\bar{\mathrm{r}})$ ja $\bar{\mathrm{H}}(\bar{\mathrm{r}})$. Miten määrität kenttien kuljettaman tehotiheyden aikakeskiarvon (suuruus ja suunta)? (3 p.)

   (c) Oikeakätisesti ympyräpolarisoitunut tasoaalto osuu äärettömän suureen ideaalijohdelevyyn kohtisuorasti. Mikä on heijastuneen sähkökentän amplitudi (suhteessa tulevan sähkökentän amplitudiin) ja polarisaatio (laji ja mahdollinen kätisyys)? (3 p.)

2. (a) Pitkässä virtalangassa kulkee kymmenen ampeerin tasavirta. Metallilanka ($L = 30\,\mathrm{cm}$) liikkuu virtalangan vierellä ($d = 10\,\mathrm{cm}$) langan suuntaisesti nopeudella $5\,\mathrm{m/s}$. Määritä liikkuvan johtimen päiden välille indusoituva jännite. (6 p.)

   (b) On annettu sähkökentän osoitin

   $$\bar{\mathrm{E}}(\bar{\mathrm{r}}) = E_0(\bar{\mathrm{u}}_z + \bar{\mathrm{u}}_y)\,\mathrm{e}^{+jkx}, \quad \text{vakiot } E_0, k > 0, \quad [E_0] = \mathrm{V/m},\ [k] = \mathrm{rad/m}.$$

   Mitä tämä osoitin esittää (vähintään neljä ominaisuutta)? (4 p.)

3. (a) Neliönmuotoisen johdinsilmukan lävistää ajasta riippuva magneettikenttä

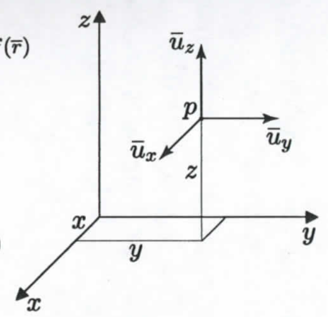
   $$\bar{\mathrm{H}}(t) = \bar{\mathrm{n}} H_0 \exp(-t^2/t_0^2), \quad \text{vakiot } H_0, t_0 > 0, \quad [H_0] = \mathrm{A/m},\ [t_0] = \mathrm{s},$$

   missä $\bar{\mathrm{n}}$ on silmukan tason normaali. Määritä silmukkaan indusoituva virta $i(t)$, kun silmukan sivun pituus on a ja silmukan johtimen resistanssi on R. (Itseinduktiota ei oteta huomioon.) (4 p.)

   (b) Häviöllisessä väliaineessa etenee tasoaalto $+z$-suuntaan. Suurin origossa havaittava kentänvoimakkuusarvo $E_0 = 240\,\mathrm{V/m}$ saavutetaan esimerkiksi hetkellä $t = 0\,\mathrm{s}$, ja tällöin kenttä origossa osoittaa suuntaan $+x$. Sähkökentällä ei ole missään y-komponenttia. Aallonpituus aineessa on $\lambda = 18\,\mathrm{mm}$ ja tunkeutumissyvyys aineeseen on $\delta = 8.1\,\mathrm{cm}$. Kirjoita sähkökenttävektorin osoitin. (6 p.)

Nablaoperaatiot

Karteesinen koordinaatisto

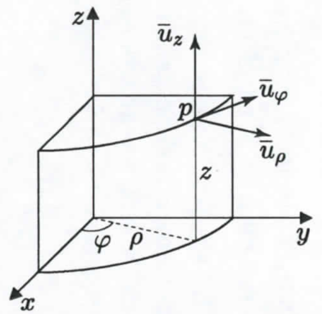


$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{r}) + \overline{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{r}) + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\overline{r})$$

$$\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f}(\overline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\overline{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



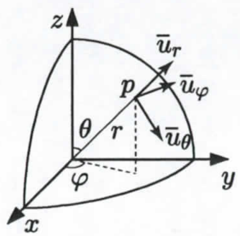
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho \overline{u}_\varphi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \overline{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r \sin\theta \overline{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin\theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Koordinaattimuunnokset vektorille $\overline{f}$

Karteesinen ↔ sylinterikoordinaatisto

$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z,$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen ↔ pallokoordinaatisto

$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta,$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri ↔ pallokoordinaatisto

$\rho = r \sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r\cos\theta,$

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_x\, dx + \overline{u}_y\, dy + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_x} = \overline{u}_x\, dy\, dz$

$\overline{dS_y} = \overline{u}_y\, dx\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z\, dx\, dy$

$dV = dx\, dy\, dz$

Sylinterikoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_\rho\, d\rho + \overline{u}_\varphi \rho\, d\varphi + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_\rho} = \overline{u}_\rho \rho\, d\varphi\, dz$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi\, d\rho\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z \rho\, d\rho\, d\varphi$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

Pallokoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_r\, dr + \overline{u}_\theta r\, d\theta + \overline{u}_\varphi r \sin\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_r} = \overline{u}_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_\theta} = \overline{u}_\theta r \sin\theta\, dr\, d\varphi$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi r\, dr\, d\theta$

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Gaussin lause $\quad \int_V \nabla \cdot \overline{f}\, dV = \oint_S \overline{f} \cdot \overline{dS}$

Stokesin lause $\quad \int_S \nabla \times \overline{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \overline{f} \cdot \overline{d\ell}$

Vakioita

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\, \mathrm{C}$