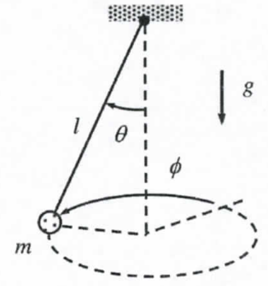
Kul-49.3100 Tentti 11.1.2014
Dynamiikka II

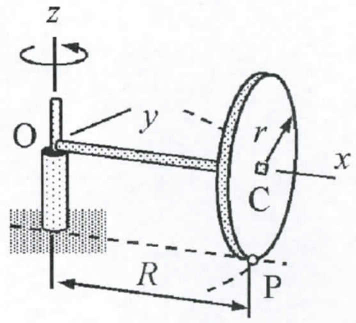
1.

Esitä kuvan partikkelin (massa m) liikeyhtälöt, kun partikkelin asemaa kuvataan kulmilla θ ja ϕ. Käytä yhtälöä $\vec{F} = m\vec{a}$ pallokoordinaatistossa. Lanka, jonka pituus on l, on venymätön ja massaton. **(6 p.)**



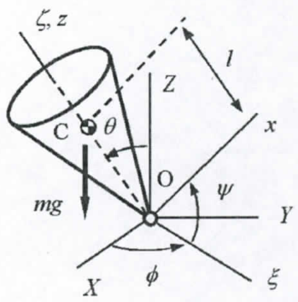
2.

Ohuesta kiekosta (säde r) ja akselista OC koostuva kappale on nivelöity pisteeseen O kuvan mukaisesti. Kiekko vierii liukumatta s.e. sen keskipiste C liikkuu vakiovauhdilla ja tekee täyden kierroksen z-akselin ympäri kuvan osoittamaan suuntaan ajassa T. Käyttäen jäykän kappaleen suhteellisen liikkeen kaavoja, määritä kiekon kulmanopeuden $\vec{\omega}$ ja kulmakiihtyvyyden $\vec{\alpha}$ lausekkeet lausuttuina kuvan akseliin kiinnitetyn xyz-koordinaatiston kannassa $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (z-akselin suunta ei muutu). **(6 p.)**



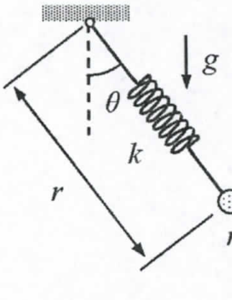
3.

Johda huolellisesti kuvan symmetrisen hyrrän liikeyhtälöiden $\dot{\vec{L}}_{\mathrm{O}} = \vec{M}_{\mathrm{O}}$ (tässä O viittaa kuvan origoon) komponenttimuoto välikoordinaatiston suunnalle $\vec{e}_{\xi}$. Hitausmomentit origon suhteen välikoordinaatistossa ovat $I_{\zeta\zeta} = I$, $I_{\eta\eta} = I_{\xi\xi} = I_0$ ja hitaustulot ovat nollia. **(6 p.)**



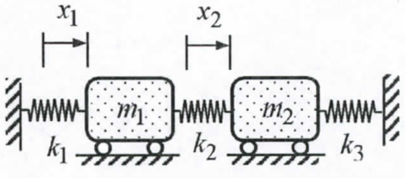
4.

Kuvan tasoheilurissa partikkeli (massa m) on asetettu roikkumaan massattomaan jouseen (jousen jousivakio k ja lepopituus l). Muodosta systeemin yleistettyjen voimien lausekkeet sekä määritä partikkelin liikeyhtälöt käyttäen Lagrangen menetelmää, kun yleistettyinä koordinaatteina ovat kuvassa esitetyt r ja θ. **(6 p.)**



5.

Kuvan systeemi koostuu kahdesta massasta ja kolmesta lineaarisesta jousesta. Jouset ovat lepopituuksissaan siirtymien x_1 ja x_2 arvoilla nolla. Muodosta systeemin Lagrangen funktio ja määritä systeemin liikeyhtälöt. **(6 p.)**



Kul-49.1100 Dynamiikka I; kaavoja

PERUSTEET

Perussuureet paikka $\vec{r}$ [m], aika t [s], voima $\vec{F}$ [N], massa m [kg]

Johdannaissuureita nopeus $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, kiihtyvyys $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, liikemäärä $\vec{p} = m\vec{v}$, liikemäärän momentti $\vec{L} = \vec{\rho} \times \vec{p}$, voiman momentti $\vec{M} = \vec{\rho} \times \vec{F}$, voiman impulssi $\vec{I} = \int_{\Delta t} \vec{F} dt$, voiman momentin impulssi $\vec{J} = \int_{\Delta t} \vec{\rho} \times \vec{F} dt$, liike-energia $T = mv^2/2$, voiman teho $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, voiman työ $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int P dt$

Peruslait liikelaki $\vec{F} = m\vec{a}$, voiman ja vastavoiman laki $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Konstitutiivisia yhteyksiä jousi $F = k(l - l_0)$, vaimennin $F = c\dot{l}$, gravitaatio $F = mg$, Coulombin liikekitka $F = \mu_k N$, Coulombin lepokitka $|F| \le \mu_s N$, sysäysyhtälö $e = -(v_2' - v_1')/(v_2 - v_1)$

KINEMATIIKKAA ERI KOORDINAATISTOISSA

Karteesinen koordinaatisto $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ & $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ & $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

Napakoordinaatisto $\vec{r} = r\vec{e}_r$ & $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$ & $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi$

Ratakoordinaatisto $\vec{v} = \dot{s}\,\vec{e}_t$ & $\vec{a} = (\dot{s}^2/\rho)\vec{e}_n + \ddot{s}\,\vec{e}_t$

Suhteellinen liike $\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}$ & $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ & $\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{a}_r + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$

ALKUARVOTEHTÄVIEN RATKAISUJA

Diff. yht. $t > 0$ & $x(0) = x_0$ & $\dot{x}(0) = v_0$ $\Leftrightarrow$ ratkaisu

$\ddot{x} = a_0 \ldots \Leftrightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + a_0 t^2/2$

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \ldots \Leftrightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + v_0/\omega_n \cdot \sin(\omega_n t)$

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \Gamma \ldots \Leftrightarrow x(t) = (x_0 - \Gamma/\omega_n^2)\cos(\omega_n t) + v_0/\omega_n \cdot \sin(\omega_n t) + \Gamma/\omega_n^2$

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \Gamma \cos\omega t \ldots \Leftrightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \dfrac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t) + \dfrac{\Gamma}{\omega_n^2 - \omega^2}[\cos(\omega_n t) - \cos(\omega_n t)]$

$\ddot{x} \pm \alpha \sin x = 0 \ldots \Leftrightarrow \dot{x}^2/2 \mp \alpha\cos x = \dot{x}_0^2/2 \mp \alpha \cos x_0$

JÄYKÄN KAPPALEEN TASOLIIKE (*XY*/*xy*-tasossa)

Kulmanopeus ja -kiihtyvyys $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{K}$ & $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$

Jäykän kappaleen partikkelin liike $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AP}$ & $\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AP})$

Kontaktityyppejä nivel $\vec{v}_P = \vec{v}_{P'}$ & $\vec{a}_P = \vec{a}_{P'}$, vieriminen $\vec{v}_P = \vec{v}_{P'}$, liukuminen $\vec{n} \cdot \vec{v}_P = \vec{n} \cdot \vec{v}_{P'}$

Translaatio liikeyhtälöt $\vec{F} = m\vec{a}_C$ & $\vec{M}_C = 0$

Rotaatio liikeyhtälöt $\vec{F} = m\vec{a}_C = m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AC} - \omega^2 \vec{\rho}_{AC})$ & $\vec{M}_A = I_A \dot{\vec{\omega}}$ (A kiinteä)

Yleinen tasoliike liikeyhtälöt $\vec{F} = m\vec{a}_C$ & $\vec{M}_C = I_C \dot{\vec{\omega}}$

Kul-49.3100 Dynamiikka II; kaavoja

KINEMATIIKKAA ERI KOORDINAATISTOISSA

Kantavektorin muutosnopeus $\{\dot{e}\} = [\dot{L}][L]^{-1}\{e\} = [\Omega]\{e\}$ tai $\dot{\vec{e}} = \vec{\Omega} \times \vec{e}$

Sylinterikoord. $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z$

Pallokoordinaatisto $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\vec{e}_\phi$$

JÄYKÄN KAPPALEEN KINEMATIIKKA

Jäykän kappaleen partikkelin liike $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AP}$, $\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AP})$

Eulerin kulmat (klassillinen mekaniikka) $\phi_{(z)}, \theta_{(x)}, \psi_{(z)}$:

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\xi + \dot{\phi}s\theta\vec{e}_\eta + \dot{\phi}c\theta\vec{e}_\zeta \;\&\; \vec{\omega} = \vec{\Omega} + \dot{\psi}\vec{e}_\zeta = (\dot{\theta}c\psi + \dot{\phi}s\theta s\psi)\vec{i} + (\dot{\phi}s\theta c\psi - \dot{\theta}s\psi)\vec{j} + (\dot{\phi}c\theta + \dot{\psi})\vec{k}$$

Jäykän kappaleen suhteellinen liike $\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_r$ & $\vec{\alpha} = \vec{\Lambda} + \vec{\alpha}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_r$

JÄYKÄN KAPPALEEN KINETIIKKA

Massan vaikutusmitat $m = \sum m_i$ & $\vec{r}_C = \sum \vec{r}_i m_i / m$ & $\vec{J} = \sum [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{I} - \vec{r}_i\vec{r}_i] m_i$

Liikemäärä ja liikemäärän momentti $\vec{p} = m\vec{v}_C$ & $\vec{L}_A = \vec{J}_A \vec{\omega}$

Liikemäärän ja liikemäärän momentin tase $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ & $\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A$ (A kiinteä tai A=C)

Hyrräyhtälöt välikoordinaatistossa ($c\theta \sim \cos\theta$, $s\theta \sim \sin\theta$ **jne.)**

$M_\xi = I_0\dot{\omega}_\xi + I\omega_\zeta\Omega_\eta - I_0\omega_\eta\Omega_\zeta = I_0\ddot{\theta} + (I - I_0)\dot{\phi}^2 c\theta s\theta + I\dot{\psi}\dot{\phi}s\theta$

$M_\eta = I_0\dot{\omega}_\eta + I_0\omega_\xi\Omega_\zeta - I\omega_\zeta\Omega_\xi = I_0(\ddot{\phi}s\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}c\theta) + (I_0 - I)\dot{\theta}\dot{\phi}c\theta - I\dot{\theta}\dot{\psi}$

$M_\zeta = I\dot{\omega}_\zeta + I_0\omega_\eta\Omega_\xi - I_0\omega_\xi\Omega_\eta = I(\ddot{\phi}c\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}s\theta + \ddot{\psi})$

LAGRANGEN FORMALISMI

Liike-energia jäykkä kappale $2T = m\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{\omega} \cdot \vec{J}_A \vec{\omega}$ (A kiinteä tai A=C)

Virtuaalinen työ jäykkä kappale $\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{M}_A \cdot \delta\vec{\theta} = \sum Q_j \delta q_j$

Yleistetty voima yleinen systeemi $Q_j = \sum \vec{F}_i \cdot \partial\vec{r}_i / \partial q_j$, konservatiivinen $Q_j = -\partial V / \partial q_j$

Potentiaalienergia etsi V s.e. $-\nabla V = \vec{F}$, vakiovoima $V = -\vec{F} \cdot \vec{r}$, lineaarinen jousi $V = k\Delta l^2/2$

Lagrangen funktio $L = T - V$

Lagrangen liikeyhtälöt yleinen $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$, konservatiivinen $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

MEKANIIKAN MATEMATIIKKAA

Kehityskaava $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ & $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Yksikkötensori (def.) $\vec{a} = \vec{I}\vec{a}$ $\forall \vec{a}$ (esim. $\vec{I} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$)