

**Laskimen käyttö ei ole sallittu**

1. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} .$$

a) Laske  $e^{t\mathbf{A}}$ .b) Näytä, että  $\|e^{t\mathbf{A}}\| \leq 1$  kaikilla  $t > 0$ . *Vihje:* laske myös  $\mu(\mathbf{A})$ .2. Millä  $a$ :n arvoilla systeemi  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  on stabiili tai asympotoottisesti stabiili, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a-1 \\ -a-1 & 2-2a \end{bmatrix} .$$

3. Tarkastellaan seuraavaa differentiaaliyhtälösystemiä.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1 \\ x_2' = -x_1 + x_1^2 \end{cases}$$

Etsi systeemin tasapainopisteet ja luokittele ne. Hahmottele ratkaisujen käyttäytymistä tasapainopisteiden ympäristössä.

4. Olkoon funktion  $f$  ja sen derivaatan arvot tunnettu pisteissä 0 ja 1. Etsitään kolmannen asteen polynomia  $p$  siten, että

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1) .$$

Näytä, että tällä tehtävällä on aina yksikäsitteinen ratkaisu.

(Tällaista kutsutaan Hermiten interpoloinniksi.)