Aalto-yliopisto

Gripenberg, Saari

MS-C1420 Fourier-analyysi
Tentti 13.5.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1.

(a) Esitä signaalin $h(t) = s(4t)$, $t \in \mathbb{R}$ Fourier-muunnos $\hat{h}$ signaalin s Fourier-muunnoksen $\hat{s}$ avulla.

(b) Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-muunnoksesta tiedetään, että $\hat{s}(-\nu) = -\hat{s}(\nu)$ kaikilla $\nu \in \mathbb{R}$. Mitä voidaan tämän perusteella sanoa signaalista s? (Voit olettaa, että $\int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)|\,d\nu < \infty$ ja $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|\,dt < \infty$.)

2. Jatkuva signaali $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on jaksollinen jaksolla 1. Millä ehdolla signaali $h(t) = \int_0^t s(\tau)\,d\tau$ on myös jaksollinen jaksolla 1 ja mikä on $\hat{h}(k)$ esitettynä s:n Fourier-kertoimien avulla kun $k \neq 0$?

3.

(a) Funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on sellainen, että $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,dt < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\nu)|\,d\nu < \infty$ ja $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{h}(j + \nu) = 1$ kaikilla ν. Osoita, että $h(0) = 1$ ja $h(k) = 0$ jos $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(b) Mitä tarkoittaa lyhenne FFT?

4. Signaalista $s(t) = \sin(2\pi 9t)$ otetaan näytteitä $\mathbf{q}(j) = s(j \cdot 0.4)$, $j = 0, 1, \ldots, 5999$ ja lasketaan tämän jonon diskreetti Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin j, $0 \leq j \leq 5999$, arvoilla luvut $|\hat{\mathbf{q}}(j)|$ ovat suurimmillaan?

5.

(a) Olkoon $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (eli ψ on äärettömän monta kertaa derivoituva ja $\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k s^{(m)}(t)| < \infty$ kaikilla k ja $m \geq 0$). Osoita, että funktio $\nu \mapsto \nu\hat{\psi}(\nu)$ on funktion $t \mapsto \frac{1}{i2\pi}\psi'(t)$ Fourier-muunnos.

(b) Olkoon $s(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Tästä funktiosta saadaan vaimennettu distribuutio $s_{\to D}$ kaavalla $s_{\to D}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\psi(t)$. Määritä tämän vaimennetun distribuution $s_{\to D}$ Fourier-muunnos (a)-kohdan tuloksen avulla.