Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Saari
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

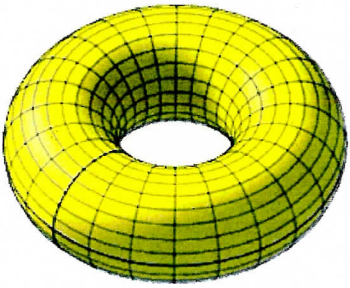
MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

2. välikoe 10.4.2014 klo 9–12.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. a) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - zy\mathbf{k}$ lähteisyys (eli divergenssi) ja pyörteisyys (eli roottori) pisteessä $(1, 2, 3)$.
   b) Oletetaan, että kolmiulotteisella vektorikentällä $\mathbf{F}$ on vektoripotentiaali $\mathbf{A}$, jolle $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$. Osoita, että vektorikentällä $\mathbf{F}$ on sellainen vektoripotentiaali $\mathbf{B}$, jolle $B_1 = 0$.
   Vihje: $\nabla \times (\nabla\varphi) = \overline{0}$.

2. Olkoot $R > r$ vakioita. Torus on (auton sisärenkaan tai munkkirinkilän muotoinen) pinta, joka syntyy r-säteisen ympyrän keskipisteen kiertäessä R-säteisen ympyrän kehän; vrt. kuvio. Toruksella on parametrisointi
$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),$$
kun $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$. Osoita, että parametrisoinnin pinta-alan suurennussuhde on $r(R + r\cos u)$ ja että toruksen pinta-ala on muotoa $2\pi r \cdot 2\pi R$. (Erikoistapaus Pappuksen lauseesta)



3. Laske vektorikentän
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$
vuo ulospäin sylinterin
$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le 9,\ 1 \le z \le 3\}$$
reunan läpi.

4. (Adams & Essex 16.5.4) Laske pintaintegraali
$$\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS,$$
kun P on reunallinen pinta
$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6, z \ge 0\},$$
jonka normaali osoittaa yläviistoon, ja
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - y^3\cos z)\mathbf{i} + x^3e^z\mathbf{j} + xyze^{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}.$$

Käännä!