

## Tentti

1. (6p) **Käsitteistöä**

- a) Pyörimismääräoperaattorit  $L^2$  ja  $L_z$  kommutoivat keskenään, joten niille voidaan muodostaa yhteinen ominaistilakanta. Kyseessä on kuitenkin kannan valinta, eikä se ole välttämätöntä. Anna siis esimerkki tilasta  $|\psi\rangle$ , joka on operaattorin  $L^2$  ominaistila, mutta *ei ole* operaattorin  $L_z$  ominaistila. Anna vielä esimerkki tilasta, joka on operaattorin  $L_z$  ominaistila, mutta *ei ole* operaattorin  $L^2$  ominaistila.
- b) Selitä lyhyesti, mitä tarkoitetaan käsitteellä Diracin (tai Fermin) meri.
- c) Tarkastellaan kahta kaksitilasyhteisyyden *tiheysmatriiseja* jossakin tilakanassa  $|0\rangle, |1\rangle$

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho_B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Mitä tiheysmatriisit  $\rho_A$  ja  $\rho_B$  kertovat todennäköisyyksistä löytää systeemi tiloilta  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$ ? Voidaanko tiheysmatriiseja erottaa toisistaan?

2. (6p) **Häiriöteoria**

Tarkastellaan  $m$ -massaista hiukasta yksiulotteisessa harmonisessa potentiaalissa  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ . Lisätään potentiaalın keskelle deltafunktio-potentiaalihäiriö  $\hat{H}'$

$$V'(x) = \langle x | \hat{H}' | x \rangle = \alpha \delta(x),$$

missä  $\alpha$  on jokin vakio. Häiriöttömät ominaistilat paikkaesityksessä ovat

$$\phi_n^{(0)}(x) = \langle x | n^{(0)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \quad (2)$$

ja vastaavat energiat  $E_n^{(0)} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$ . Viisi ensimmäistä Hermiten polynomia ovat  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ ,  $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ ,  $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ .

- a) Muodosta yhtälö paikkaesityksessä alkuperäisen potentiaalın ominaistilojen ensimmäisen kertaluvun energiakorjauksille  $E_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | H' | n^{(0)} \rangle$ . Selitä miksi energiat eivät muutu osalle tiloista.