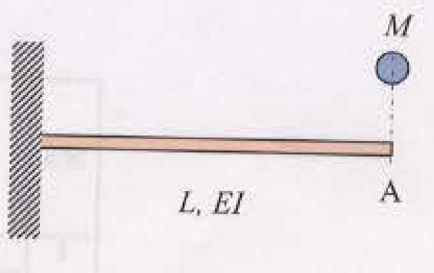
# Rak-54.2110 Sauva- ja kehärakenteet

tentti, 22.2.2014

1. Oheisen tasossa $L$-pituisen olevan ulokepalkin taivutusjäykkyys $EI$ = vakio. Tarkastellaan seuraavat kuormitustapaukset a) ja b) erikseen.

   a) Ulokkeen päässä A vaikuttaa ainoastaan staattinen pystykuorma $F$. Määritä pisteen A *staattinen pystysiirtymä* $v_{A,stat}$.

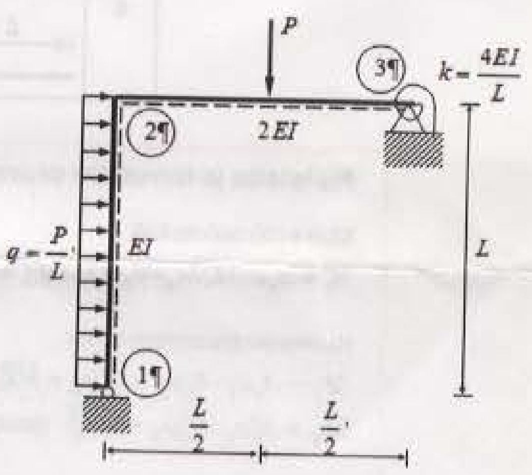
   b) jäykkä kappale jonka massa on $M$ putoaa ulokepalkin vapaan pään A:n päälle korkeudelta $h$. Törmäyksessä massa $M$ jää kiinni palkkiin. Massan alkunopeus on nolla. Määritä tällöin *maksimipystysiirtymä* $v_{A,dyn}$.
   Palkin massaa ei tarvitse huomioida putoavan massan $M$ rinnalla eikä tarvitse huomioida muita energiahäviöitä. .
   $a$)-kohdan staattinen voima $F$ ei ole nyt vaikuttamassa vaan pelkästään törmäyksestä syntyvä dynaaminen $F_{dyn}$ kuorma. Oletetaan, että palkki pysyy vielä kimmoisena.




   c) Määritä suhde $v_{Adyn}/v_{A,stat}$? Mitä se edustaa ja miksi kutsutaan tätä suhdelukua?

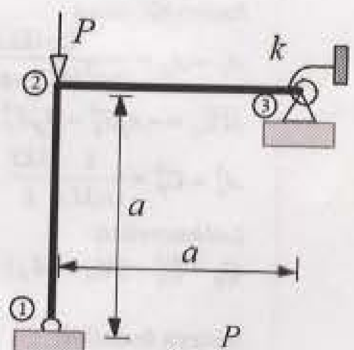
2. Määritä oheisen kimmoisen tasokehän taivutusmomenttikuvio.

   ***Vinkki***: mieti miten voisit hyödyntää tämän tehtävän tuloksia tehtävässä 3)

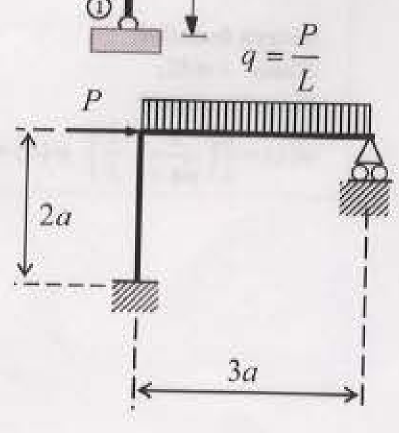



3. Määritä oheisen lineaarisesti elastisen kehän kuorman $P_{kr}$ arvo nurjahduksen suhteen (menetelmä on vapaa). Jousivakion arvo $k = EI/a$. Tuet 1 ja 3 eivät salli pysty- eikä vaakasiirtymiä. Tulokseksi riittää johtaa ekspliittisen ehdon tai yhtälön josta pystyy määrittämään yksikäsitteisesti $P_{cr}$. Hahmota nurjahdusmuoto.

   ***Vinkki***: mieti miten voisit hyödyntää tehtävän 2) tuloksia tässä.




4. Määritä oheisen tasokehän plastinen rajakuorma $P$. Materiaali on ideaaliplastista.
   Mikä on murtomekanismi? Tarkista, ettei myötöehtoa rikota missään konstruoimalla tasapainoehdot toteuttava taivutusmomenttijakauma.



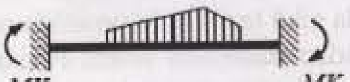
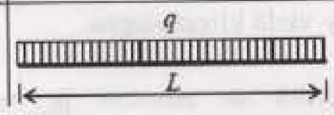
### Kulmanmuutosmenetelmä

$$M_{ij} = a_{ij}\varphi_{ij} + b_{ij}\varphi_{ji} - c_{ij}\psi_{ij} + MK_{ij}$$

$$M_{ij} = a^0_{ij}\varphi_{ij} - c^0_{ij}\psi_{ij} + MK^0_{ij},$$ sauvan päässä $j$ on nivel)

**Sauvavakiot** ($EI$ = vakio) :

$$a_{ij} = \frac{4EI}{L},\ b_{ij} = a_{ij}/2 = \frac{2EI}{L},\ c_{ij} = \frac{6EI}{L},\ a^0_{ij} = b^0_{ij} = \frac{3EI}{L}$$

| N:o | Kuormitus | Kiinnitysmomentit: |
|---|---|---|
| | |  |
| 1 |  | $MK_1 = -\frac{qL^2}{12},\ MK_2 = \frac{qL^2}{12}$ |
| 6 |  | $MK_1 = -\frac{FL}{8},\ MK_2 = \frac{FL}{8}$ |

### Puristettu ja taivutettu sauva:

Momenttimenetelmä

$$\varphi_{ij} = \alpha_{ij}\psi(kL)M_{ij} - \beta_{ij}\phi(kL)M_{ji} + \psi_{ij} + \overline{\alpha}^0_{ij}(kL),\ k^2 \equiv P/EI$$

Kulmanmuutosmenetelmä

$$M_{ij} = A_{ij}\varphi_{ij} + B_{ij}\varphi_{ji} - C_{ij}\psi_{ij} + \overline{MK}_{ij}$$

$$M_{ij} = A^0_{ij}\varphi_{ij} - C^0_{ij}\psi_{ij} + \overline{MK}^0_{ij}$$ (sauvan päässä $j$ on nivel)

*Tasajäykkä sauva :*

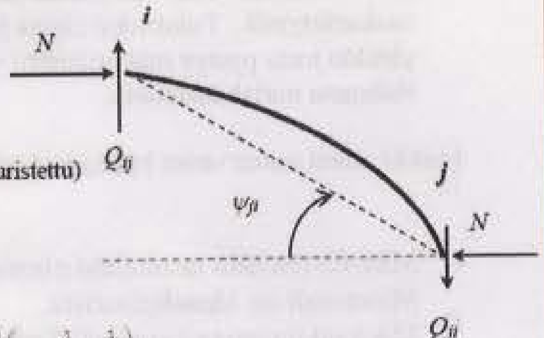
$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{2\psi(kL)}{4\psi^2(kL) - \phi^2(kL)}\frac{6EI}{L},\ B_{ij} = B_{ji} = \frac{\phi(kL)}{4\psi^2(kL) - \phi^2(kL)}\frac{6EI}{L}\ \text{ja}\ C_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

$$\overline{MK}_{ij} = -A_{ij}\overline{\alpha}^0_{ij} - B_{ji}\overline{\alpha}^0_{ji}, \qquad \overline{MK}_{ji} = -A_{ji}\overline{\alpha}^0_{ji} - B_{ij}\overline{\alpha}^0_{ij},$$

$$A^0_{ij} = C^0_{ij} = \frac{1}{\psi(kL)}\frac{3EI}{L}, \qquad \overline{MK}^0_{ij} = -A_{ij}\overline{\alpha}^0_{ij}$$

*Leikkausvoima:*

$$Q_{ij} = Q^0_{ij} - (M_{ij} + M_{ji})/L - N\psi_{ij}$$ ($N$ positiivinen, kun sauva puristettu)




**Berryn funktiot:**
Olkoon $\lambda \equiv kL$.
*Puristettu sauva:*

$$\phi(\lambda) = \frac{6}{\lambda}\left(\frac{1}{\sin\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right),\ \psi(\lambda) = \frac{3}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\tan\lambda}\right)\ \text{ja}\ \chi(\lambda) = \frac{24}{\lambda^3}\left(\tan\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right).$$