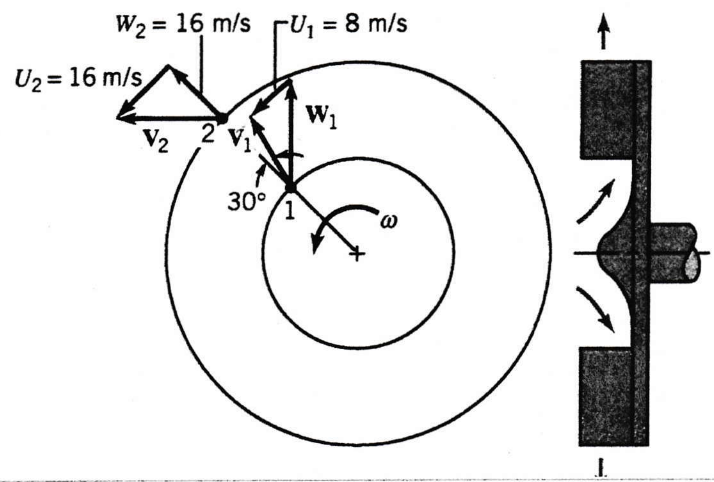
Tehtävä 1. [6 p.]

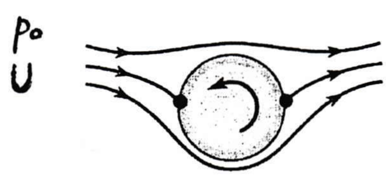
Kuvaan 1 on hahmoteltu nopeuskolmiot eräälle virtauslaitteelle. Virtaava aine on vettä.

a) (4p.) Määritä energian muutos virtaavan aineen massayksikköä (kg) kohden. Onko kyseessä pumppu vai turbiini?

b) (2p.) Piirrä tilanteeseen soveltuva siipisola.



Kuva 1: Tehtävän 1 virtauslaite.



Kuva 2: Tehtävän 2 pyörivä sylinteri.

Tehtävä 2. [6 p.]

Tarkastellaan potentiaalivirtausmallia virtaukselle pyörivän sylinterin ohi. Sylinterin säde on R, tulovirtauksen nopeus U ja paine kaukana sylinterin edessä p_0.

Potentiaaliteoriassa virtaus pyörivän sylinterin (kuva 2) ohi muodostetaan yhdistämällä yhdensuuntaisvirtaus, dipoli, jonka voimakkuus on UR^2, ja vapaa pyörre, jonka voimakkuus on Γ. Asetetaan pyörteen voimakkuudeksi $\Gamma = 2\pi UR$.

a) (1p.) Ratkaise patopisteen paikka.

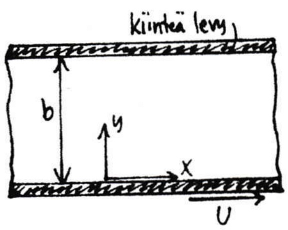
b) (2p.) Ratkaise patopisteen kautta kulkevan virtaviivan yhtälö. Mitä tämä virtaviiva kuvaa?

c) (1p.) Laske paine patopisteessä.

d) (2p.) Miten vapaa pyörre vaikuttaa sylinteriin kohdistuviin voimiin? (Sanallinen vastaus riittää.)

Tehtävä 3. [6 p.]

Turbulentin putkivirtauksen painehäviö riippuu putken halkaisijasta, pituudesta ja pinnankarheudesta, nesteen tiheydestä ja dynaamisesta viskositeetista, sekä virtausnopeudesta. Kiteytä painehäviön tarkastelu dimensioanalyysin avulla. Mikä yhteys tuloksellasi on Moody-diagrammin kanssa?



Kuva 3: Tehtävän 4 virtaus levyjen välissä

Tehtävä 4. [6 p.]

a) (2p) Navier–Stokesin yhtälöt ovat liikemäärätase differentiaalisessa muodossa. Tarkastellaan laskennallisesti esim. virtausta kappaleen ympärillä. Mitä eroja on Navier–Stokesin yhtälöistä saadulla ratkaisulla ja potentiaaliteorian mukaisella ratkaisulla? (Vain sanallinen vastaus.)

b) (4p) Ajastariippumattomassa, kaksiulotteisessa, laminaarissa ja täysin kehittyneessä virtauksessa kahden yhdensuuntaisen levyn välissä (kuva 3) Navier-Stokesin yhtälöt voidaan yksinkertaistaa muotoon:

$$0 = \mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

missä u on nopeuskomponentti x-akselin suuntaan ja p on paine, joka riippuu vain x -koordinaatista. Muut nopeuskomponentit ovat nollia.

Tarkastellaan kuvan 3 virtausta kahden yhdensuuntaisen levyn välissä. Levyjen välinen etäisyys on b. Alempi levy liikkuu nopeudella U. Tällöin Navier–Stokesin yhtälöiden ratkaisu on

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2$$

missä c_1 ja c_2 ovat tuntemattomia vakioita. Ratkaise vakiot reunaehtojen avulla.