

Kul-34.3100 Virtausmekaniikan perusteet

Tentti

2.6.2014

Muistathan, että perustelut ovat tärkeä osa laskua ja arviolua!

Properties of air

density: $\rho_{\text{air}} = 1.23 \text{ kg/m}^3$

(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{air}} = 1.79 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Properties of water

density: $\rho_{\text{water}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{water}} = 1.12 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Gravitational acceleration: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Equations When you use these equations, please explain what you are doing and what principle you are applying. Not all the equations may be needed.

Bernoulli equation: $p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_T$

Energy balance:

$$(p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho V^2)_{\text{out}} = (p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho V^2)_{\text{in}} + \text{work done on the CV} - \text{losses}$$

Losses: $\Delta p_{\text{friction}} = \left(f \frac{L}{D}\right) \frac{1}{2} \rho V^2$ and $\Delta p_{\text{loss}} = K_{\text{loss}} \frac{1}{2} \rho V^2$

Reynolds number: $Re_l = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu}$

Power: $P = \Delta p Q$

Mass flux: $\dot{m} = \int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$

Momentum flux: $\int_A \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$

Momentum balance: $\sum \vec{F} = [\text{momentum flux out}] - [\text{momentum flux in}]$

Moment-of-momentum equation:

$$\Sigma \vec{T} = \dot{m}_{\text{out}} (\vec{r} \times \vec{V})_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}} (\vec{r} \times \vec{V})_{\text{in}}$$
$$\vec{r} \times \vec{V} = \pm r V_{\theta}$$

Euler turbomachine equation:

$$P = \dot{m}_{\text{out}} (\pm U V_{\theta})_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}} (\pm U V_{\theta})_{\text{in}}$$

Buckingham Π -theorem:

If an equation involving k variables is dimensionally homogeneous, it can be reduced to a relationship among $k - r$ independent dimensionless products, where r is the minimum number of reference dimensions required to describe the variables.

Criteria for the repeating variables:

1. The number of repeating variables is equal to the number of reference dimensions.
2. All the required reference dimensions must be included within the group of repeating variables.
3. Each repeating variable must be dimensionally independent of the others.

Moody chart and basic potential functions are at the end of the exam

Colebrook formula:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \begin{cases} -2.0 \log_{10} \left[\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_D} \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right) \right], & \text{implicit form} \\ -1.8 \log_{10} \left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}_D} \right], & \text{explicit form} \end{cases}$$

Material derivative:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Continuity equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \end{aligned}$$

Navier-Stokes equations: (gravity acts in negative z -direction)

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho g \end{aligned}$$

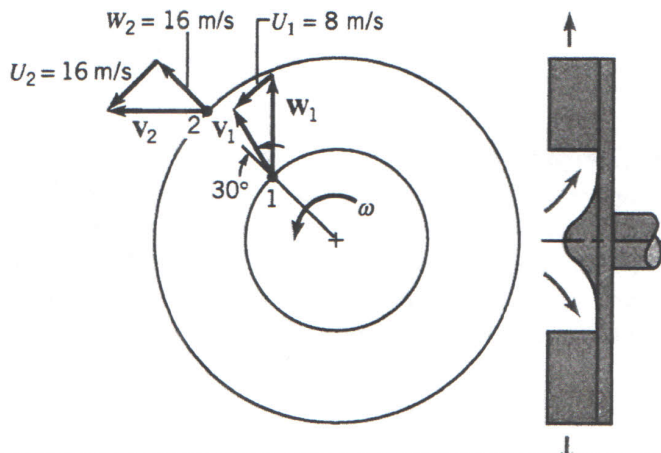
Viscous stress for a newtonian fluid: (expressed in *cartesian index notation*)

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

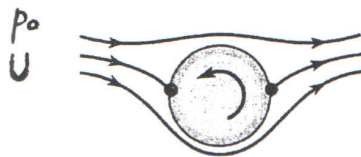
Tehtävä 1. [6 p.]

Kuvaan 1 on hahmoteltu nopeuskolmiot eräälle virtauslaitteelle. Virtaava aine on vettä.

- a) (4p.) Määritä energian muutos virtaavan aineen massayksikköä (kg) kohden. Onko kyseessä pumppu vai turbiini?
 b) (2p.) Piirrä tilanteeseen soveltuva siipisola.



Kuva 1: Tehtävän 1 virtauslaite.



Kuva 2: Tehtävän 2 pyörivä sylinteri.

Tehtävä 2. [6 p.]

Tarkastellaan potentiaalivirtausmallia virtaukselle pyörivän sylinterin ohi. Sylinterin säde on R , tulovirtauksen nopeus U ja paine kaukana sylinterin edessä p_0 .

Potentiaaliteoriassa virtaus pyörivän sylinterin (kuva 2) ohi muodostetaan yhdistämällä yhdensuuntaisvirtaus, dipoli, jonka voimakkuus on UR^2 , ja vapaa pyörre, jonka voimakkuus on Γ . Asetetaan pyörteen voimakkuudeksi $\Gamma = 2\pi UR$.

- a) (1p.) Ratkaise patopisteen paikka.
 b) (2p.) Ratkaise patopisteen kautta kulkevan virtaviivan yhtälö. Mitä tämä virtaviiva kuvaa?

c) (1p.) Laske paine patopisteessä.

d) (2p.) Miten vapaa pyörre vaikuttaa sylinteriin kohdistuviin voimiin? (Sanallinen vastaus riittää.)

Tehtävä 3. [6 p.]

Turbulentin putkivirtauksen painehäviö riippuu putken halkaisijasta, pituudesta ja pinnankarheudesta, nesteen tiheydestä ja dynaamisesta viskositeetista, sekä virtausnopeudesta. Kiteytä painehäviön tarkastelu dimensioanalyysin avulla. Mikä yhteys tuloksellasi on Moody-diagrammin kanssa?

Tehtävä 4. [6 p.]

Vesi virtaa horisontaalisen 180° putken mutkan läpi kuvan 3 osoittamalla tavalla. Putken poikkipinta-ala on vakio $0,01 \text{ m}^2$ koko mutkan pituudella. Nopeus on putken suuntainen ja kaikkialla 15 m/s . absoluuttiset paineet mutkan sisäänmenossa ja ulostulossa ovat 207 kPa (abs) and 165 kPa . Laske horisontaalisen voiman (x and y) komponentit, jotka tarvitaan pitämään putki paikoillaan. Onko tämä voima sama kuin nesteen putken aiheuttama voima? Perustele vastauksesi.

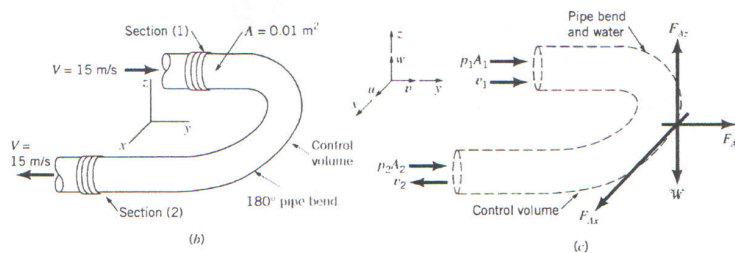
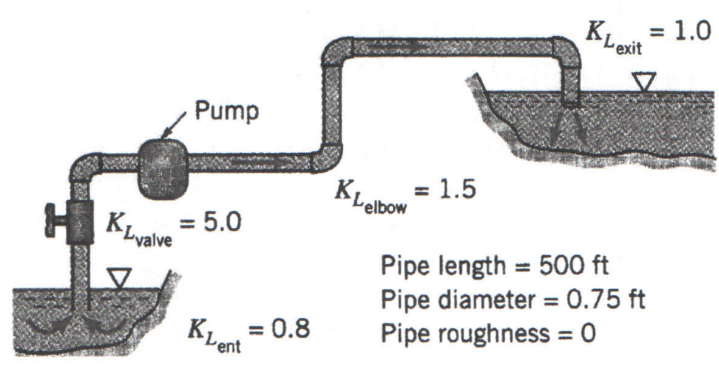


Figure E5.12 cont.

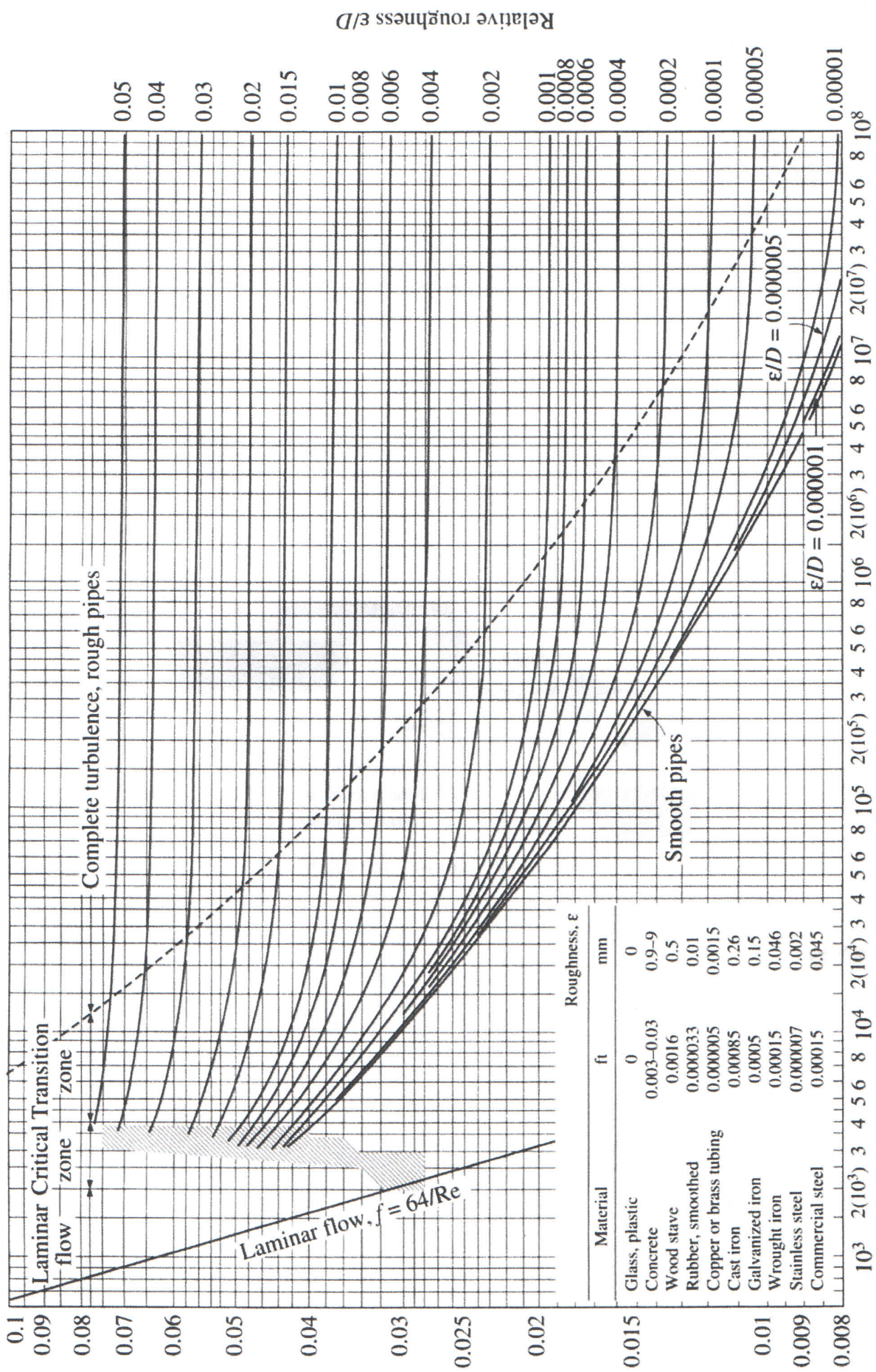
Kuva 3: Tehtävän 4 putken mutka.

Tehtävä 5. [6 p.]

Kuvassa 4 pumppu pumppaa putkiston kautta vettä alemmasta lamesta ylemmään. Pumpun nostokorkeus on 76 m ($7,46 \cdot 10^5 \text{ Pa}$). Määritä pumpun teho. Lampien pintojen välinen korkeusero on 60 m , putken halkaisija 23 cm ja pituus 152 m . Putken materiaali on sileää. Putkistossa olevan venttiilin vastuskerroin on 5 , mutkien vastuskertoimet $1,5$, ulosvirtauksen 1 ja sisäänvirtauksen $0,8$.



Kuva 4: Tehtävän 5 putkilinja.



Reynolds number Re