Kul-34.3100 Virtausmekaniikan perusteet

Tentti 29.8.2014

Muistathan, että perustelut ovat tärkeä osa laskua ja arvostelua!

Properties of air
density: $\varrho_{\text{air}} = 1.23\,\text{kg/m}^3$
(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{air}} = 1.79 \times 10^{-5}\,\text{Pa·s}$

Properties of water
density: $\varrho_{\text{water}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$
(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{water}} = 1.12 \times 10^{-3}\,\text{Pa·s}$

Gravitational acceleration: $\text{g} = 9.81\,\text{m/s}^2$

Equations When you use these equations, please explain what you are doing and what principle you are applying. Not all the equations may be needed.

Bernoulli equation: $p + \varrho\,\text{g}\,h + \frac{1}{2}\,\varrho\,V^2 = p_T$

Energy balance:

$$\left(p + \varrho\,\text{g}\,h + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,V^2\right)_{\text{out}} = \left(p + \varrho\,\text{g}\,h + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,V^2\right)_{\text{in}} + \text{work done on the CV} - \text{losses}$$

Losses: $\Delta p_{\text{friction}} = \left(f\,\dfrac{L}{D}\right)\,\frac{1}{2}\,\varrho\,V^2$ and $\Delta p_{\text{loss}} = K_{\text{loss}}\,\frac{1}{2}\,\varrho\,V^2$

Reynolds number: $\text{Re}_l = \dfrac{\varrho\,V\,l}{\mu} = \dfrac{V\,l}{\nu}$

Power: $P = \Delta p\,Q$

Mass flux: $\dot{m} = \int_A \varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\text{d}A$

Momentum flux: $\int_A \vec{V}\,\varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\text{d}A$

Momentum balance: $\sum \vec{F} = [\text{momentum flux out}] - [\text{momentum flux in}]$

Moment-of-momentum equation:

$$\Sigma\vec{T} = \dot{m}_{\text{out}}\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}}\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)_{\text{in}}$$
$$\vec{r}\times\vec{V} = \pm r\,V_\theta$$

Euler turbomachine equation:

$$P = \dot{m}_{\text{out}}\left(\pm U\,V_\theta\right)_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}}\left(\pm U\,V_\theta\right)_{\text{in}}$$

Buckingham Π-theorem:

If an equation involving k variables is dimensionally homogeneous, it can be reduced to a relationship among $k-r$ independent dimensionless products, where r is the minimum number of reference dimensions required to describe the variables.

Criteria for the repeating variables:

1. The number of repeating variables is equal to the number of reference dimensions.
2. All the required reference dimensions must be included within the group of repeating variables.
3. Each repeating variable must be dimensionally independent of the others.

Moody chart and basic potential functions are at the end of the exam

Colebrook formula:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \begin{cases} -2.0 \log_{10}\left[\dfrac{\varepsilon/D}{3.7} + \dfrac{2.51}{\mathrm{Re}_D}\left(\dfrac{1}{\sqrt{f}}\right)\right], & \text{implicit form} \\ -1.8 \log_{10}\left[\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \dfrac{6.9}{\mathrm{Re}_D}\right], & \text{explicit form} \end{cases}$$

Material derivative:

$$\frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\,\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\,\frac{\partial \varrho}{\partial z}$$

Continuity equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} \varrho\,\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_A \varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = 0$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\varrho\vec{V}\right) = \frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \varrho\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) = 0$$

Navier-Stokes equations: (gravity acts in negative z-direction)

$$\varrho\,\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\varrho\,\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\varrho\,\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \varrho\,\mathrm{g}$$

Viscous stress for a newtonian fluid: (expressed in *cartesian index notation*)

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \delta_{ij}\,\lambda\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

Summary of Basic, Plane Potential Flows

Description of Flow Field	Velocity Potential	Stream Function	Velocity Components[a]	
Uniform flow	$\phi = U\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$	$\psi = U\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$	$u = U\cos\alpha$	$v = U\sin\alpha$
	The velocity U makes an angle α relative to the x-axis.			
Source / sink	$\phi = \frac{m}{2\pi}\ln r$	$\psi = \frac{m}{2\pi}\theta$	$v_r = \frac{m}{2\pi r}$	$v_\theta = 0$
	If $m > 0$, it is a source. If $m < 0$, it is a sink.			
Free vortex	$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$v_r = 0$	$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$
	If $\Gamma > 0$, it is a counter-clockwise motion ($\circlearrowleft$). If $\Gamma < 0$, it is a clockwise motion ($\circlearrowright$).			
Doublet	$\phi = \frac{K\cos\theta}{r}$	$\psi = -\frac{K\sin\theta}{r}$	$v_r = -\frac{K\cos\theta}{r^2}$	$v_\theta = -\frac{K\sin\theta}{r^2}$

[a]Velocity components are related to the velocity potential and stream function through relationships:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Tehtävä 1. [6 p.]

Erään puristumattoman virtauksen nopeuskomponentit ovat $u = 3(x^2 - y^2)$ ja $v = -6xy$, missä x:n ja y:n yksikkö on metrejä. Määritä virtafunktio ψ ja piirrä origon (0,0) kautta kulkevat virtaviivat.

Tehtävä 2. [6 pts.]

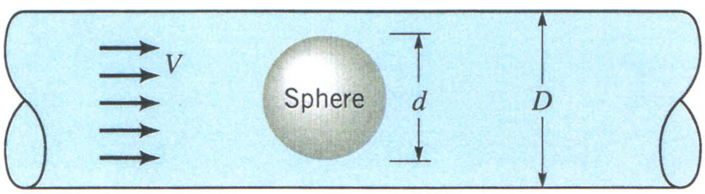
Virtaus pyörivän sylinterin ohi voidaan potentiaaliteoriassa mallintaa approksimatiivisesti yhdistämällä dipoli, vapaa pyörre ja yhdensuuntainen virtaus. Sovella Bernoullin yhtälöä ja hae painejakauma sylinterin pinnalla. Oleta, että sylinterin säde on $a = 1$.

Tehtävä 3. [6 p.]

Putken sisällä olevan pallon vastus $\mathscr{D}$ määritetään kokeellisesti kuvan 1 mukaisessa tilanteessa. Oleta, että vastus on funktio pallon halkaisijasta d, putken halkaisijasta D, virtausnopeudesta V, ja nesteen tiheydestä ϱ.

(a) Mitä dimensiottomia lukuja tulee käyttää tässä tehtävässä?

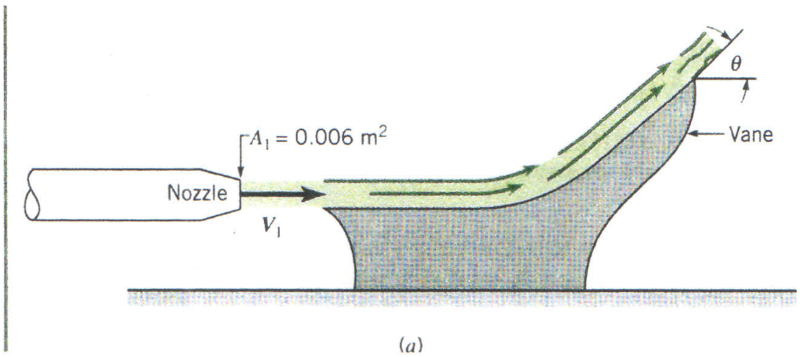
(b) Vedellä tehdyissä kokeissa $d = 0.005\,\mathrm{m}$, $D = 0.0125\,\mathrm{m}$, ja $V = 0.6\,\mathrm{m/s}$, vastukseksi saatiin $\mathscr{D} = 6.675 \times 10^{-3}\,\mathrm{N}$. Arvioi vastuksen suuruus $D = 0.6\,\mathrm{m}$ halkaisijaltaan olevassa putkessa, kun vesi virtaa nopeudella $1.8\,\mathrm{m/s}$ geometrian pysyessä samana.



Kuva 1: Tehtävän 3 virtaustilanne.

Tehtävä 4. [6 pts.]

Tasaisella nopeudella 3 m/s tuleva ilmasuihku osuu kuvan (2) mukaiseen esteeseen ja kääntyy kulman θ verran. Määritä esteeseen vaikuttava voima, joka tarvitaan pitämään se paikallaan, kun gravitaatio ja kitkan vaikutus voidaan jättää huomiotta.



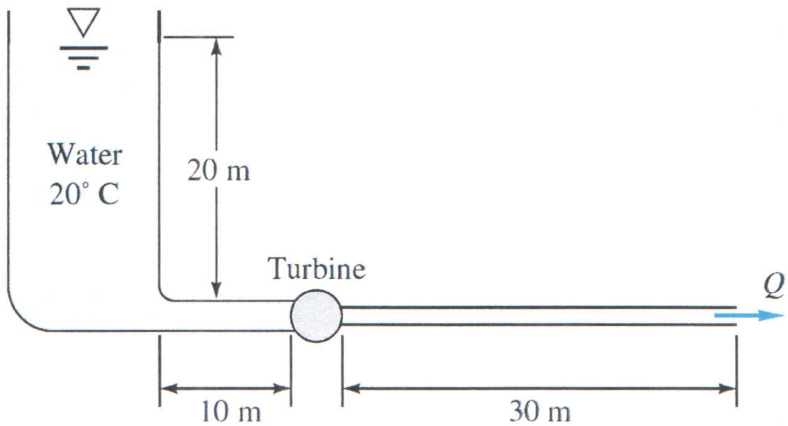
Kuva 2: Esteeseen osuva ilmasuihku (tehtävä 4).

Tehtävä 5. [6 pts.]

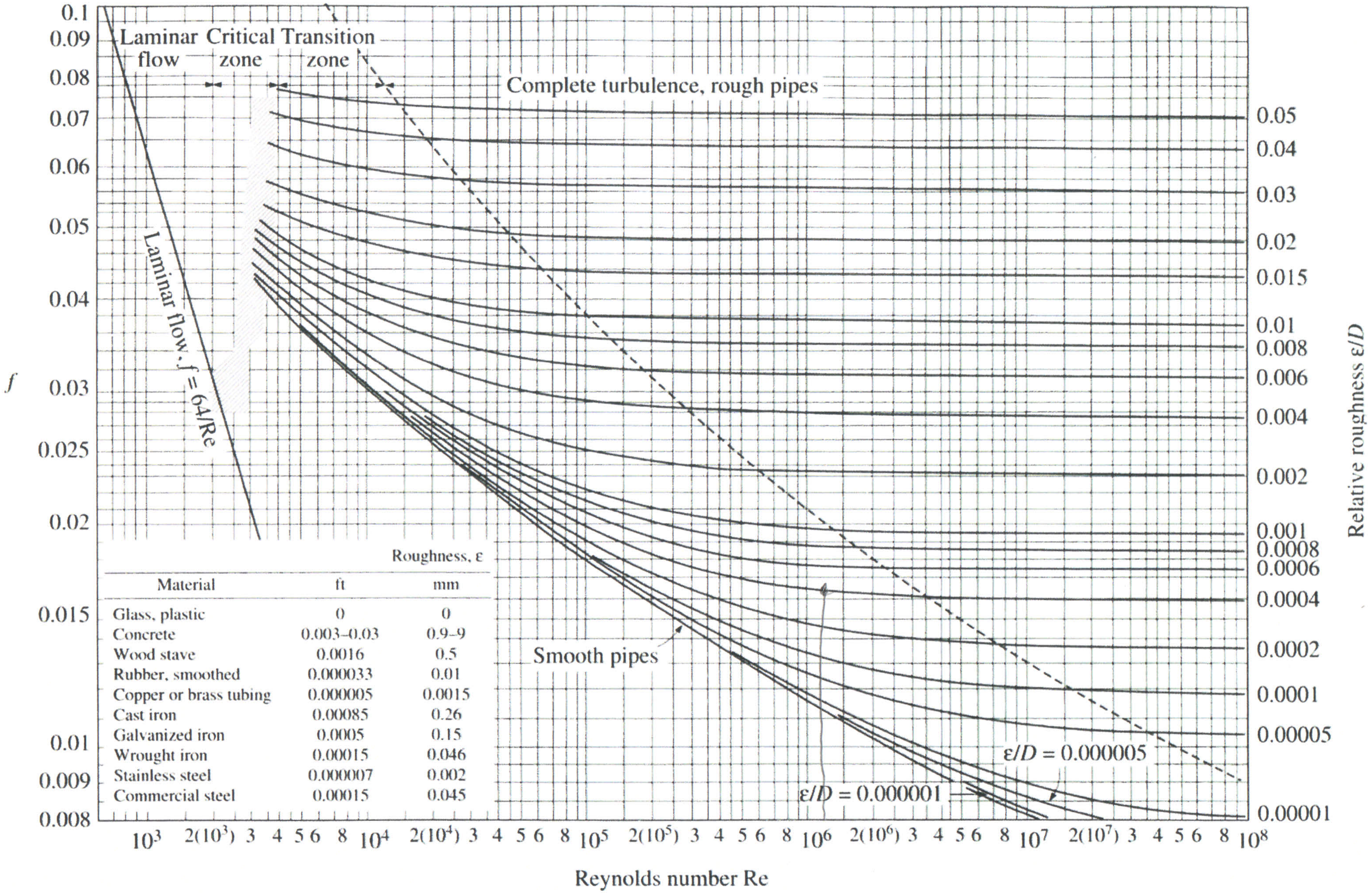
Kuvan 3 mukainen pieni turbiini tuottaa 0.4 kW tehon, kun virtaavan veden tiheys on $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ ja kinemaattinen viskositeetti $\nu = 1.12\times10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$. Turbiiniin yhdistetyt putket on tehty takoraudasta, jolle pinnan karheus on $\epsilon = 0.05\,\mathrm{mm}$. Laske läpi virtaava tilavuusvirta Q.

Pipe #1: $L_1 = 10\,\mathrm{m}$, $D_1 = 8\,\mathrm{cm}$

Pipe #2: $L_2 = 30\,\mathrm{m}$, $D_2 = 5\,\mathrm{cm}$



Kuva 3: Turbiini ja putkisto (Tehtävä 5.)



Material	Roughness, ε: ft	Roughness, ε: mm
Glass, plastic	0	0
Concrete	0.003–0.03	0.9–9
Wood stave	0.0016	0.5
Rubber, smoothed	0.000033	0.01
Copper or brass tubing	0.000005	0.0015
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Wrought iron	0.00015	0.046
Stainless steel	0.000007	0.002
Commercial steel	0.00015	0.045