

A?**Mat-1.1220 Matematiikan peruskurssi S2****Tentti, 19.12.2013 klo 9-13**

Aalto-yliopisto

Kokeessa saa käyttää laskimia, ei muita apuvälineitä.

Tehtävä 1: Tutki, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-n)^3 - 5}{8n^3 + 7n} \right)^{1/3}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^4}.$$

Tehtävä 2: Laske pisteen $(1, 0, -1)$ etäisyys suorasta, joka kulkee pisteiden $(1, -2, 0)$ ja $(3, 0, 1)$ kautta.

Tehtävä 3: Olkoon

$$f(x, y) = \frac{2x}{1 + y^2}.$$

- Laske funktion f osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- Laske f :n suunnattu derivaatta vektorin $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ suuntaan pisteessä $(1, 1)$.
- Määrä tasa-arvokäyrän $f(x, y) = 1$ normaalivektori pisteessä $(1, 1)$.
- Laske f :n osittaisderivaattoja käyttäen pinnan $z = f(x, y)$ normaalivektori pisteessä $(1, 1, 1)$.

Tehtävä 4: Hahmottele pinnat $z = 5 - x + y$, $x^2 + y^2 = 1$ ja $z = 0$ ja laske näiden rajoittaman kolmiulotteisen kappaleen tilavuus napakoordinaattien avulla.

Tehtävä 5: Olkoon F vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

- Onko F pyörteetön tai lähteetön?
- Osoita, että F on konservatiivinen ja etsi sille skalaaripotentiali.
- Laske $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, kun C on sileä käyrä pisteestä $(0, 0, 0)$ pisteeseen $(1, 1, 1)$.

Tehtävä 6: Olkoon

$$\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$$

ja C kolmion, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$, myötäpäivään suunnistettu kehä. Laske viivaintegraali $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.