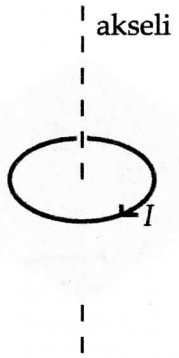
Vastaa tehtävään 4 ja valintasi mukaan **joko tehtävään 5 tai 6.** Jokainen tehtävä on kymmenen pisteen arvoinen. (Jos vastaat sekä tehtävään 5 että 6, tehtävä 5 arvioidaan.)
Palauta vähintään yksi nimelläsi varustettu konsepti. Palauta *kaikki* saamasi yliopiston konseptiarkit – myös tyhjät ja suttupaperit. Tehtäväpaperin saat pitää.
Sallittu oheismateriaali: taskulaskin (myös ohjelmoitavat ja graafiset laskimet käyvät).

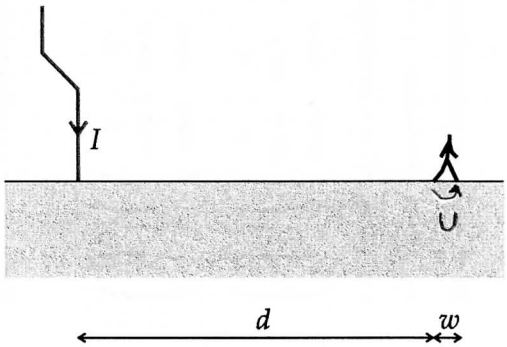
4. (a) Maadoitetun $z = 0$ -johdetason yläpuolella ilmassa (korkeudella $z = h > 0$) on sähködipoli $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{\mathbf{u}}_x - \bar{\mathbf{u}}_z)$ Cm. Kenttien laskemiseen halutaan käyttää kuvalähdeperiaatetta. Mikä on annettua dipolia vastaavan kuvalähteen dipolimomentti $\bar{\mathbf{p}}_i$? Piirrä kuva tilanteesta. (4 p.)

   (b) Ilman ja johdeaineen (johtavuus σ) rajapintaan tuodaan yhteen pisteeseen virta I. Millainen virrantiheys (suuruus ja suunta) syntyy johdeaineeseen? Piirrä kuva. (3 p.)

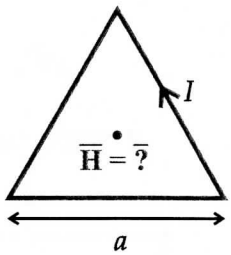
   (c) Mikä on magneettikentän suunta oheisen ympyränmuotoisen virtasilmukan tasossa (koko taso)? (3 p.)



5. Salama iskee johtavaan maahan. Iskukohdasta poispäin kävelee ihminen kuvan mukaisesti ($d = 12.8$ m ja $w = 0.80$ m). Mikä on *askeljännite* U maan pinnalla? Salaman virta $I = 35$ kA ja maan johtavuus $\sigma = 4.0$ S/m. (Askeljännite on edemmän ja taaemman jalan maakosketuspisteiden välisen potentiaalieron itseisarvo.)

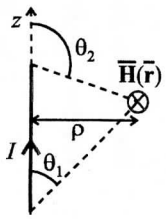


6. Ohuesta johdelangasta valmistettu virtapiiri on tasasivuisen kolmion muotoinen (ks. kuva). Määritä magneettikenttävektori $\bar{\mathbf{H}}$ (suuruus ja yksikäsitteinen suunta) kolmion keskipisteessä.



Mahdollisen tarpeen varalta: Äärellisen virtalangan magneettikentän lauseke (katso kuvaa):

$$\bar{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{u}}_\varphi \frac{I}{4\pi\rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$



Nablaoperaatiot

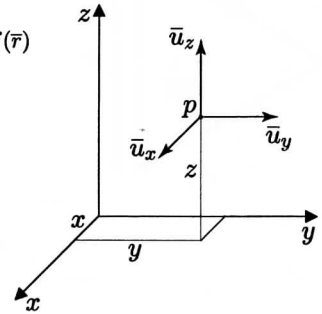
Karteesinen koordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{r}) + \overline{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{r}) + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\overline{r})$$

$$\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f}(\overline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\overline{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



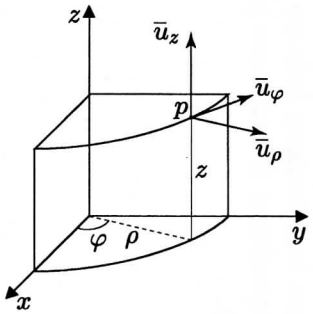
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho \overline{u}_\varphi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



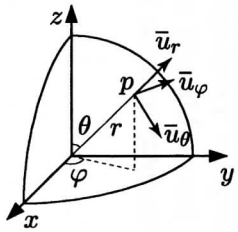
Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \overline{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r\sin\theta \overline{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin\theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



Koordinaattimuunnokset vektorille $\overline{f}$

Karteesinen ↔ sylinterikoordinaatisto

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen ↔ pallokoordinaatisto

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri ↔ pallokoordinaatisto

$$\rho = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$$\overline{d\ell} = \overline{u}_x\, dx + \overline{u}_y\, dy + \overline{u}_z\, dz$$

$$\overline{dS_x} = \overline{u}_x\, dy\, dz$$

$$\overline{dS_y} = \overline{u}_y\, dx\, dz$$

$$\overline{dS_z} = \overline{u}_z\, dx\, dy$$

$$dV = dx\, dy\, dz$$

Sylinterikoordinaatisto

$$\overline{d\ell} = \overline{u}_\rho\, d\rho + \overline{u}_\varphi \rho\, d\varphi + \overline{u}_z\, dz$$

$$\overline{dS_\rho} = \overline{u}_\rho \rho\, d\varphi\, dz$$

$$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi\, d\rho\, dz$$

$$\overline{dS_z} = \overline{u}_z \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

Pallokoordinaatisto

$$\overline{d\ell} = \overline{u}_r\, dr + \overline{u}_\theta r\, d\theta + \overline{u}_\varphi r \sin\theta\, d\varphi$$

$$\overline{dS_r} = \overline{u}_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\overline{dS_\theta} = \overline{u}_\theta r \sin\theta\, dr\, d\varphi$$

$$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi r\, dr\, d\theta$$

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Gaussin lause $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \overline{f}\, dV = \oint_S \overline{f} \cdot \overline{dS}$

Stokesin lause $\displaystyle\int_S \nabla \times \overline{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \overline{f} \cdot \overline{d\ell}$

Vakioita

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\, \mathrm{C}$$