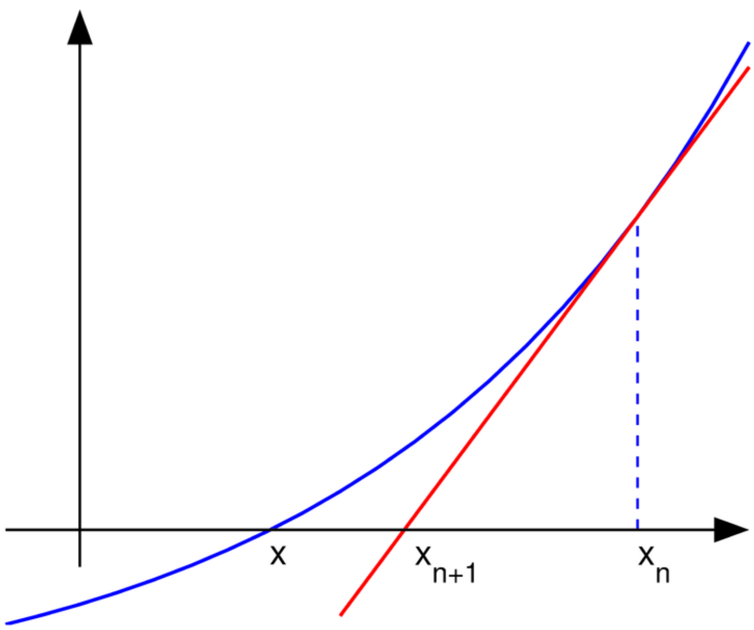
1.

a) Newtonin menetelmässä valitaan nollakohdan arvaukseksi piste x_n. Piste x_{n+1} saadaan piirtämällä tähän pisteeseen käyrälle tangentti ja tutkimalla, missä se leikkaa x-akselin (huomaa wikipediasta pöllitty kuva alhaalla). Voidaan samaistaa tangentin kulmakertoimen lauseke ja derivaatta. Muokataan vielä lauseke oikean näköiseksi.

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \text{ (kulmakertoimen määritelmä)} \\ f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) &= f(x_n) \\ (x_n - x_{n+1}) &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

Ja tämä onkin haluttu Newton, jota voidaan iteroida...



b)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2 \\ f'(x) &= 3x^2 \\ x_0 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f'(x_0)}{f(x_0} \\ &= 2 - \frac{2^3 + 2}{3 \cdot 2^2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3.

a) Käytetään yhdistetyn funktion ja tulon derivoimissääntöjä.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2) \\ f'(x) &= \cos(x^2) \cdot 2x \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2) \end{aligned}$$

b) Käytetään yhdistetyn funktion ja tulon derivoimissääntöjä.
L'Hospital (oletuksista ehkä oleellisin tässä tehtävässä: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ tai $\pm\infty$).

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Sovellettaessa sääntöä kaksi kertaa tarvitaan toiset derivaatat sekä osoittajasta että nimittäjästä.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2) \text{ (derivoitu a-kohdassa)} \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2) \\ \\ g(x) &= 1 - \cos(x) \\ g'(x) &= \sin(x) \\ g''(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

L'Hospital on selvästikin käyttökelpoinen kahdesti.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{1 - \cos(x)} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot \cos(x^2)}{\sin(x)} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2))}{\cos(x)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cdot 1 - 4 \cdot 0}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{5^n}$$

2 a)

$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. SARJA SUPPENEE, JOS $L < 1$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1+2}{5^{n+1}}}{\frac{n+2}{5^n}}\right| = \left|\frac{n+3}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n+2}\right| = \left|\frac{n+3}{5n+10}\right| = \left|\frac{1+\frac{3}{n}}{5+\frac{10}{n}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

$L = \frac{1}{5} < 1$, JOTEN SARJA SUPPENEE

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{5^n} x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+3)x^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{(n+2)x^n}\right| = \left|\frac{x + \frac{3x}{n}}{5 + \frac{10}{n}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|\frac{x}{5}\right| < 1$$

$\Longrightarrow$ AINAKIN VÄLILLÄ $\underline{-5 < x < 5}$ SUPPENEE

TUTKITAAN VIELÄ PÄÄTEPISTEET ELI $x = \pm 5$

$\underline{x=5}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{5^n} 5^n = \lim_{n\to\infty} (n+2) = \infty$ $\Longrightarrow$ SARJA HAJAANTUU

$\underline{x=-5}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{5^n} \cdot 5^n (-1)^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n (n+2)$

LEIBNIZ $\begin{cases} (i) & |a_k| \geq |a_{k+1}| \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ (ii) & \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ SARJA SUPPENEE

$\Longrightarrow$ NYT HAJAANTUU

$\Longrightarrow$ SARJA SUPPENEE ARVOILLA $\underline{\underline{-5 < x < 5}}$

4) $y = y(t)$ TOTEUTTAA DY:N $y' = ky$, $k > 0$

RATKAISU ON MUOTOA $y(t) = Ce^{kt}$

$y(0) = 1000 \Rightarrow y(0) = Ce^{k \cdot 0} = \underline{\underline{C = 1000}}$

$y(2) = 10^6 \Rightarrow y(2) = 1000e^{2k} = 10^6$

$e^{2k} = 1000 \quad | \ln$

$2k = \ln 1000$

$2k = \ln(10^3)$

$2k = 3\ln(10)$

$\underline{\underline{k = \frac{3}{2}\ln(10)}}$