Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Malinen/Ojalammi
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

1. välikoe 1.10.2014 klo 17–19.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Laske raja-arvo
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{1 - \cos(2x)}$$
L'Hospitalin säännön avulla.

2. Määritä funktioiden $f(x) = e^{4x} - 1 - 4x$ ja $g(x) = 1 - \cos(2x)$ toisen asteen Maclaurin-polynomit $P_2^{(f)}(x)$ ja $P_2^{(g)}(x)$. Laske niiden avulla raja-arvo
$$\lim_{x\to 0} \frac{P_2^{(f)}(x)}{P_2^{(g)}(x)}.$$
Lisätieto: Maclaurin = Taylor tapauksessa $x_0 = 0$.

3. Tarkastellaan keskimääräistä ilmanpainetta $p = p(h)$ Maan pinnalta mitatun etäisyyden $h \geq 0$ funktiona, kun muuttujan h yksikkönä on kilometri. Funktio $p(h)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $p' = -kp$, jossa k on positiivinen vakio.
a) Mittausten perusteella ilmanpaine 17 kilometrin korkeudella on kymmenesosa Maan pinnan arvosta, toisin sanoen $p(17) = p(0)/10$. Määritä vakion k tarkka arvo.
b) Millä korkeudella ilmanpaine on puolet Maan pinnan arvosta $p(0)$? Vastauksen voi antaa tarkkana arvona.

4. Laske integraalit
$$\int_0^1 (\sin(\pi x) - x)\, dx \quad \text{ja} \quad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5 + x^2}}\, dx.$$

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

VK1/2014, RATKAISUT/PJA

1. $\left.\begin{array}{l} f(x) = e^{4x} - 1 - 4x \\ g(x) = 1 - \cos(2x) \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ muotoa "$\frac{0}{0}$"

$f'(x) = 4e^{4x} - 4$, $g'(x) = 2\sin(2x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ edelleen "$\frac{0}{0}$"

$f''(x) = 16e^{4x}$, $g''(x) = 4\cos(2x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{16}{4} = 4$

L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \underline{\underline{4}}$

---

2. $e^t \approx 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow P_2^{(f)}(x) = \left(1 + 4x + \frac{1}{2}(4x)^2\right) - 1 - 4x = \underline{\underline{8x^2}}$

$\cos t \approx 1 - \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow P_2^{(g)}(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}(2x)^2\right) = \underline{\underline{2x^2}}$

TAI: LASKETAAN DERIVAATAT + SIJ.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{P_2^{(f)}(x)}{P_2^{(g)}(x)} = \underline{\underline{4}}$ (L'Hospital on tämän menetelmän erikoistapaus!)

---

3. a) $p' = -kp \Rightarrow p(h) = p(0)e^{-kh}$. $p(17) = \frac{1}{10}p(0) \Leftrightarrow \cancel{p(0)}e^{-17k} = \frac{1}{10}\cancel{p(0)}$

$\Leftrightarrow -17k = \ln(1/10) = -\ln 10 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = \frac{\ln 10}{17}}}$

b) $p(h_0) = \frac{1}{2}p(0) \Leftrightarrow \cancel{p(0)}e^{-kh_0} = \frac{1}{2}\cancel{p(0)} \Leftrightarrow e^{-kh_0} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -kh_0 = \ln(1/2) = -\ln 2 \Leftrightarrow h_0 = \frac{\ln 2}{k} = \underline{\underline{\frac{\ln 2}{\ln 10}\cdot 17}} \approx 5{,}1$ km

---

1. $\int_0^1 (\sin(\pi x) - x)\,dx = \Big/_0^1 \left(\frac{-1}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) - \frac{1}{2}$

$= \underline{\underline{\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}}}$

$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}\,dx = \Big/_0^2 \sqrt{5+x^2} = \sqrt{9} - \sqrt{5} = \underline{\underline{3 - \sqrt{5}}}$

$D\sqrt{5+x^2} = \frac{1}{2}(5+x^2)^{-1/2}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}$